MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

48. BAND 4. UND 5. (SCHLUSS-) HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 20. MÄRZ 1943)

BERLIN
SPRINGER-VERLAG
1943

Die MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Verfügung zwecks Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Waldhäuser Straße 105,
R. Nevanlinna, Helsinki, Pietarink 5 a,
E. Schmidt, Berlin-Charlottenburg 2, Bismarckstraße 107^{IV},
F. K. Schmidt, Flughafen Ainring, Post Freilassing (Obb.).

48. Band. **Inhalt:** 4. und 5. Heft.

Seite

Krull, Prof. Dr. W., Bonn a. Rh., Kaiser-Friedrich-Straße 18: Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. VIII. Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen 533

Schröder, Doz. Dr. habil. K., Berlin-Tempelhof, Germaniastraße 93: Zur Theorie der Randwertaufgaben der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$ 553

Fejes, Ass. Dr. L., Kolozsvár (Ungarn), Geom. Inst. d. Univ., Farkas-u. 1: Über die dichteste Kugellagerung 676

Fan, Docteur ès Sciences Ky, Paris (V^e), 7, Rue Malebranche: Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière et leur application à l'étude de l'itération des transformations continues 685

Grüß, Prof. Dr. G., Freiberg i. Sa., Akademiestraße 6: Über das ϑ im verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung 712

Klein-Barmen, Dr. F., Wuppertal-Wichlinghausen, Müggenburg 62: Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. Zweiter Teil 715

Bödewadt, Doz. Dr. U. T., Posen, Math. Inst. d. Universität: Die Kettenregel für höhere Ableitungen 735

Nöbeling, Prof. Dr. G., Erlangen, Lammersstraße 5: Über den Flächeninhalt dehnungsbeschränkter Flächen 747

Fenyö, Dr. St., Budapest (Ungarn), II. Kelety Károly u. 11/b: Über die „Polynom-Kerne" der linearen Integralgleichungen 772

Schöbe, Gefr. Dr. W., Feldpost-Nr. 39 715: Das Lucassche Ehepaarproblem 781

Hornich, Doz. Dr. H., Wien 117, Gallmeyergasse 12: Über gewisse trigonometrische Integrale. I. 785

Berichtigung zu Band 47 792

Titel und Inhalt zum 48. Bande.

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche.

VIII. Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen[1].

Von

Wolfgang Krull in Bonn.

Im ersten Teil (§ 1 bis § 3) der Note wird das Verhalten der Ideale eines beliebigen Integritätsbereichs $\mathfrak{R}$ beim Übergang zu gewissen „transzendenten" Oberringen näher untersucht[2]. Für den einfachsten Spezialfall der transzendenten Erweiterung des Grundkörpers eines Polynomrings wurde ein Teil der einschlägigen Sätze bereits von K. Hentzelt bzw. E. Noether bewiesen, und zwar mit der gleichen Methode, wie sie auch in § 1 des Textes benutzt wird[3]. Eine Wiederaufnahme der Untersuchung unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen schien mir vor allem deshalb wünschenswert, weil sie zwanglos auf eine bemerkenswerte, bisher anscheinend noch nicht systematisch studierte Idealoperation führt: Ist in $\mathfrak{R}$ ein festes „*multiplikativ abgeschlossenes*" (in Zukunft kurz „*m. a.*") System Δ von *endlichen* Idealen[4] gegeben, das gleichzeitig mit e_1 und e_2 stets auch $e_1 \cdot e_2$ enthält, so verstehen wir bei beliebigem $\mathfrak{a}$ unter $\mathfrak{a}_\Delta$ die Summe aller der Ideale $\mathfrak{c}$, für die bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{e}$ aus Δ das Produkt $\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{c}$ in $\mathfrak{a}$ liegt, und bezeichnen den Übergang von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{a}_\Delta$ als *Δ-Operation*. Erst mit Hilfe der Δ-Operation, die eine Verallgemeinerung der üblichen „Bildung von isolierten Komponentenidealen" darstellt, können die Untersuchungen von § 1 bis § 3 zu einem wirklich be-

[1]) Vgl. die früheren Beiträge, Math. Zeitschr. **41**, **42**, **44**, **45**. — Der vorliegende Beitrag knüpft vor allem an Beitrag I [Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 545—577] an.

[2]) Anders als in den früheren Beiträgen, deren Bezeichnungsweise wir im übrigen übernehmen, braucht $\mathfrak{R}$ nicht ganz abgeschlossen zu sein. Unter „Ideal" schlechtweg verstehen wir stets ein *ganzes* Ideal.

[3]) K. Hentzelt, Zur Theorie der Polynomideale und Resultanten. Herausgegeben von E. Noether, Math. Annalen **88** (1922), S. 53—73. Es handelt sich in der Hentzelt-Noetherschen Terminologie um den Satz, daß „die Grundideale eines transformierten Ideals stets selbst transformiert sind", nebst seinen Folgerungen. — § 1 nimmt in unserer Note eine gewisse Sonderstellung ein; er enthält alle die elementaren Sätze, die ohne Heranziehung des Begriffs des multiplikativ abgeschlossenen Idealsystems formuliert und bewiesen werden können, und die z. B. in der Theorie der Polynomringe dauernd benutzt werden.

[4]) Wir nennen ein Ideal endlich, wenn es eine endliche Basis besitzt.

friedigenden Abschluß gebracht werden. Das Endergebnis läßt sich kurz etwa so formulieren:

Es sei $\mathfrak{P}$ der Polynomring in einer Variablenmenge $u_1, u_2, \ldots, u_\tau, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit über $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}_u$ sei ein m. a. Polynomsystem aus $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ der durch $\mathfrak{S}_u$ erzeugte Quotientenring von $\mathfrak{P}$. Schließlich bedeute Λ das m. a. System aller der endlichen Ideale $\mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{R}$, bei denen $\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{P}$ mindestens ein Polynom aus $\mathfrak{S}_u$ enthält. Dann gilt für jedes $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ die Gleichung $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}_\Lambda$, und es hat $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{Q}$ im wesentlichen die gleiche Struktur wie $\mathfrak{a}_\Lambda$ in $\mathfrak{R}$.

In § 4, der innerhalb der Note für sich allein steht, wird die für die Λ-Operation nicht unwichtige Frage untersucht, ob bei beliebigem $\mathfrak{a}$ und endlichem $\mathfrak{e}$ aus der Gleichung $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ stets auf die Existenz eines $c \subset \mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{a} : (c) = \mathfrak{a}$ geschlossen werden kann. Bemerkenswert ist vor allem ein bei dieser Gelegenheit benutztes „Lemma", das für m. a. Elementsysteme schon lange bekannt war [5]), aber ohne wesentliche Änderung des Wortlautes auf beliebige m. a. Systeme von *endlichen* Idealen ausgedehnt werden kann.

In § 5 und § 6, die zusammengenommen den eigentlichen Hauptteil der Note bilden, wird die Λ-Operation mit der in Beitrag I entwickelten Theorie der arithmetisch brauchbaren $'$-Operationen und der Kroneckerschen Funktionalringe in Zusammenhang gebracht. Die Hauptergebnisse lauten: Eine Λ-Operation ist dann und nur dann gleichzeitig eine $'$-Operation, wenn für jedes Hauptideal $(a)_\Lambda = (a)$ wird. Verknüpft man eine der Bedingung $(a)_\Lambda = (a)$ genügende Λ-Operation mit einer arithmetisch brauchbaren, im Sinne von P. Lorenzen [6]) endlichartigen, etwa durch den Index w gekennzeichneten $'$-Operation, indem man allgemein $\mathfrak{a}_{w_\Lambda} = (\mathfrak{a}_w)_\Lambda$ setzt, so entsteht wieder eine arithmetisch brauchbare, endlichartige $'$-Operation („w_Λ-Operation").

Der zur w-Operation gehörige Kroneckersche Funktionalring $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Lambda}$ ist ein leicht angebbarer Quotientenring des zur ursprünglichen w-Operation gehörigen Kroneckerschen Funktionalrings $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$. Darüber hinaus können *alle* Quotientenringe von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$, die einer aus der (festgehaltenen) w-Operation abgeleiteten w_Λ-Operation als Funktionalring zugeordnet sind, in einfacher Weise charakterisiert werden.

Erst durch diese Sätze werden die in den letzten drei Paragraphen von Beitrag I begonnenen Untersuchungen zu einem wirklich befriedigenden Abschluß gebracht. Damals war die Λ-Operation in — (wie sich nachträglich

[5]) Vgl. W. Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung. Math. Annalen **101** (1929), S. 729—744.

[6]) Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie. Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 533—553; § 2.

zeigt) — wenig zweckmäßiger Weise mit Hilfe gewisser Primidealmengen definiert worden, und es konnten infolgedessen nur bei den ganz abgeschlossenen Ringen mit Maximalbedingung endgültige Sätze aufgestellt werden, während bei den Integritätsbereichen ohne Endlichkeitsbedingung nur Teilresultate gewonnen wurden. Jetzt dagegen führt die „richtige" Definition der A-Operationen mit Hilfe der m. a. Idealsysteme nicht nur zu einer vollständigen Erledigung des allgemeinen Falls, sondern auch gleichzeitig zu einer der Sachlage angemessenen Vereinfachung der Beweise, die u. a. zur Folge hat, daß der Hauptteil der Sätze von § 5 und § 6 unmittelbar auf beliebige kommutative Halbgruppen im Sinne von P. Lorenzen [6]) übertragen werden kann.

§ 1.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Integritätsbereich, $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}[u_1, u_2, \ldots]$ sei der Ring aller Polynome in einer Variablenmenge $u_1, u_2, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}$. Unter dem *Inhalt* des $\mathfrak{P}$-Polynoms $p(u)$ verstehen wir das aus den Koeffizienten von $p(u)$ abgeleitete $\mathfrak{R}$-Ideal. Dann gilt nach Dedekind und Mertens der folgende

Hilfssatz 1. *Ist* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$ *bzw.* $\mathfrak{c}$ *der Inhalt von* $p(u)$ *bzw.* $q(u)$ *bzw.* $r(u) = p(u) \cdot q(u)$, *so wird für hinreichend großes* m *stets* $\mathfrak{a}^{m+1} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^m \cdot \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}^{m+1} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{b}^m \cdot \mathfrak{c}$ [7]).

Aus dem Hilfssatz folgt insbesondere: Die Menge aller Polynome vom Inhalt $\mathfrak{R}$ bildet in $\mathfrak{P}$ ein *multiplikativ abgeschlossenes* (in Zukunft kurz „*m. a.*") System M^*, sie enthält also gleichzeitig mit zwei Polynomen stets auch deren Produkt. — Es sei nun M irgendein multiplikativ abgeschlossenes Untersystem von M^*, und es bedeute $\mathfrak{S}$ den durch M erzeugten Quotientenring von $\mathfrak{P}$, also den Ring aller Quotienten $\frac{p(u)}{q(u)}$ $(p(u) \subset \mathfrak{P},\ q(u) \subset \mathsf{M})$. Wir stellen uns die Aufgabe, das Verhalten der Ideale von $\mathfrak{R}$ beim Übergang zu $\mathfrak{S}$ näher zu untersuchen.

Alle Polynome aus M sind in $\mathfrak{S}$ Einheiten, und jedes $\mathfrak{S}$-Element kann durch Multiplikation mit einem Polynom aus M in ein $\mathfrak{P}$-Element verwandelt werden. Wir brauchen also bei den Idealen aus $\mathfrak{S}$ im wesentlichen nur auf die in ihnen auftretenden Polynome, d. h. auf ihren Durchschnitt mit $\mathfrak{P}$ zu achten. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, $q(u)$ irgendein Polynom aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$, so gilt eine Gleichung $\mu(u) \cdot q(u) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot p_i(u)$ $(\mu(u) \subset \mathsf{M};\ a_i \subset \mathfrak{a},\ p_i(u) \subset \mathfrak{P}\ (i = 1, \ldots, m))$. Der Inhalt von $\mu(u) \cdot q(u)$ ist ein Unterideal

[7]) Ein knapper Beweis von Hilfssatz 1 findet sich bei H. Prüfer, Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern. J. f. Math. **168** (1932), S. 1—36, § 9. — Zu der Art, wie im folgenden mit dem Hilfssatz gearbeitet wird, vgl. auch: W. Krull, Hauptidealzerlegung in Polynomringen. Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 213—217.

von $\mathfrak{a}$, und aus dem Hilfssatz folgt, daß $\mu(u) \cdot q(u)$ und $q(u)$ denselben Inhalt besitzen müssen. Damit ist gezeigt:

Satz 1. *Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, so enthält $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ stets alle und nur die Polynome, deren Inhalt ein Unterideal von $\mathfrak{a}$ ist. — Anders ausgedrückt: Es ist stets* $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}) \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{P}$, $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}) \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}$.

Die Ideale aus $\mathfrak{R}$ lassen sich also *umkehrbar eindeutig* ihren Erweiterungsidealen auf $\mathfrak{S}$ zuordnen.

Satz 2. *Ist* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots$ *eine unverkürzbare Durchschnittsdarstellung von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}$, so ist* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{S}) \cap \cdots$ *eine solche von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$.*

Zum Beweis von Satz 2 braucht man wegen Satz 1 nur zu zeigen, daß $\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{S}) \cap (\mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{S}) \cap \cdots$ kein *echtes* Oberideal von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ sein kann. Ist aber $p(u)$ irgendein Polynom aus $\mathfrak{b}$, so muß der Inhalt von $p(u)$ nach Satz 1 in $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots = \mathfrak{a}$ enthalten sein, es ist also sicher $p(u) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$. — Unter dem *Inhalt* eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}_s$ aus $\mathfrak{S}$ wollen wir die Summe der Inhalte aller zu $\mathfrak{a}_s$ gehörigen $\mathfrak{P}$-Polynome verstehen. Dann gilt:

Satz 3. *Ist $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}_s$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{S}$ und bedeutet $\mathfrak{b}$ den Inhalt von $\mathfrak{b}_s$, so ist stets* $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}) : \mathfrak{b}_s = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{S}$.

Ist zunächst $\mathfrak{b}_s = (p(u))$ mit $p(u) \subset \mathfrak{P}$, so ist nach Satz 1 der Inhalt $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{b}_s$ gleich dem Inhalt von $p(u)$, und aus dem Hilfssatz und Satz 1 folgt sofort, daß $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p(u))$ alle und nur die Polynome $q(u)$ enthält, deren Inhalt ein Unterideal von $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ist, es wird also in diesem Falle tatsächlich $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p(u)) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : \mathfrak{b}_s = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{S}$. — Es sei jetzt allgemein $\mathfrak{b}_s = (p_1(u), p_2(u), \ldots)$, $\mathfrak{b}^{(\tau)}$ sei der Inhalt von $p_\tau(u)$. Dann wird, wie leicht aus dem Hilfssatz zu erschließen, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{(1)} + \mathfrak{b}^{(2)} + \cdots$, und man erhält nach bekannten Quotientenformeln: $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : \mathfrak{b}_s = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p_1(u), p_2(u), \ldots) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p_1(u)) \cap \cap (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p_2(u))) \cap \cdots = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{(1)}) \cdot \mathfrak{S}) \cap ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{(2)}) \cdot \mathfrak{S}) \cap \cdots = ((\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{(1)}) \cap \cap (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}^{(2)}) \cap \cdots) \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{a} : (\mathfrak{b}^{(1)} + \mathfrak{b}^{(2)} + \cdots)) \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{S}$. — Aus Satz 3 folgt insbesondere:

Das Polynom $p(u)$ ist zu dem Erweiterungsideal $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ des Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ dann und nur dann prim, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} : (p(u)) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$, wenn der Inhalt $\mathfrak{b}$ von $p(u)$ zu $\mathfrak{a}$ prim ist, $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. Aus dieser Bemerkung schließt man mühelos weiter:

Satz 4. *Ist* $\mathfrak{q}$ *in $\mathfrak{R}$ ein zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so ist $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$ ein zum Primideal $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ gehöriges Primärideal*[8]).

[8]) Im Spezialfall der Grundkörpererweiterung eines Polynomringes vgl. zu Satz 4 auch: B. L. VAN DER WAERDEN, Zur algebraischen Geometrie. Berichtigungen und Ergänzungen. Math. Annalen **113** (1936), S. 213—217.

Die Sätze 1 bis 3 gestatten es, die Ideale $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ geradezu mit ihren Erweiterungsidealen $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ zu identifizieren. Satz 4 besagt dann einfach, daß beim Übergang von $\mathfrak{R}$ zu $\mathfrak{S}$ Primideale Primideale und Primärideale Primärideale bleiben. Eine besonders wichtige Anwendung unserer Sätze betrifft den Fall, daß $\mathfrak{R} = \mathsf{K}[x_1, x_2, \ldots]$ ein *Polynomring* in einer Variablenmenge $x_1, x_2, \ldots$ von beliebiger Mächtigkeit über einem beliebigen Grundkörper K ist, während $\mathfrak{S} = \Lambda \cdot \mathfrak{R}$ den Polynomring in $x_1, x_2, \ldots$ über einem rein transzendenten Oberkörper $\Lambda = \mathsf{K}(u_1, u_2, \ldots)$ von K darstellt. (Man wähle in $\mathfrak{P} = \mathsf{K}[x_1, x_2, \ldots; u_1, u_2, \ldots]$ für M den Polynomring $\mathsf{K}[u_1, u_2, \ldots]$!). — Ist in $\mathfrak{R}$ jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar, eine Voraussetzung, die bekanntlich z. B. bei einem Integrität bereich mit Maximalbedingung immer erfüllt ist, so können die Sätze 1 bis 4 leicht ergänzt werden durch

Satz 5. *Die zugehörigen Primideale bzw. die isolierten Komponentenideale von* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *in* $\mathfrak{S}$ *sind stets gleich den Erweiterungsidealen der zugehörigen Primideale bzw. isolierten Komponentenideale von* $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{R}$ [9]).

Zum Beweise hat man nur zu beachten: Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ eine unverkürzbare Primärkomponentenzerlegung von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{S}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_n \cdot \mathfrak{S})$ eine solche von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$, und es sind die zu den Primäridealen $\mathfrak{q}_i$ bzw. $\mathfrak{q}_i \cdot \mathfrak{S}$ gehörigen Primideale nach Definition gerade die sämtlichen „zu $\mathfrak{a}$“ bzw. „zu $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$“ gehörigen Primideale. — Sämtliche isolierten Komponentenideale von $\mathfrak{a}$ entstehen dadurch, daß man im Durchschnitt $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ geeignete Komponenten $\mathfrak{q}_i$ wegläßt; läßt man im Durchschnitt $(\mathfrak{q}_1 \cdot \mathfrak{S}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{q}_n \cdot \mathfrak{S})$ jeweils die entsprechenden Komponenten $\mathfrak{q}_i \cdot \mathfrak{S}$ weg, so erhält man gerade die sämtlichen isolierten Komponentenideale von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$. — Etwas mühsamer gestaltet sich die Verschärfung der Sätze 1 bis 4 bei allgemeinen Integritätsbereichen ohne jede Endlichkeitsbedingung. Zunächst erhält man:

Satz 6. *Die minimalen Primoberideale bzw. die isolierten Primärkomponenten von* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *sind gleich den Erweiterungsidealen der minimalen Primoberideale bzw. isolierten Primärkomponenten von* $\mathfrak{a}$ [9]).

Daß $\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{S}$ ein minimales Primoberideal bzw. eine isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ darstellt, falls $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{q}$ ein minimales Primoberideal bzw. eine isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ ist, ergibt sich fast unmittelbar aus Satz 1 und Satz 4. Es sei nun $\mathfrak{p}_s$ ein beliebiges minimales

[9]) Zur Definition der zugehörigen Primideale und isolierten Komponentenideale in Ringen mit Maximalbedingung bzw. zur Definition der minimalen Primoberideale und isolierten Primärkomponenten in beliebigen Ringen vgl. z. B.: W. Krull, Idealtheorie. Ergebnisse d. Mathematik u. ihrer Grenzgebiete, Bd. 4, Heft 3 (1935); Nr. 6 bzw. Nr. 3.

Primoberideal von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$, $\mathfrak{q}_s$ sei die zugehörige isolierte Primärkomponente; dann ist jedenfalls $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_s \cap \mathfrak{R}$ ein zum Primideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_s \cap \mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal. Ist ferner $\mathfrak{q}(u)$ irgendein Polynom aus $\mathfrak{q}_s$ mit dem Inhalt $\mathfrak{b}$, so gibt es nach Definition der isolierten Primärkomponenten ein nicht zu $\mathfrak{p}_s$ gehöriges Polynom $r(u)$, derart, daß $\mathfrak{q}(u) \cdot r(u) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ wird. Der Inhalt $\mathfrak{c}$ von $r(u)$ ist nicht in $\mathfrak{p}_s$ und damit auch nicht in $\mathfrak{p}$ enthalten; andererseits wird nach Satz 1 und dem Hilfssatz $\mathfrak{c}^m \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}^m \cdot (q(u)) \subseteq \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ für hinreichend großes m. Daraus folgt: $\mathfrak{q}_s$ bzw. $\mathfrak{q}$ besteht aus allen und nur den Elementen von $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{R}$, die durch Multiplikation mit geeigneten, nicht zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Faktoren *aus* $\mathfrak{R}$ in Elemente von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ verwandelt werden können. Es wird also jedenfalls $\mathfrak{q}_s = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{S}$. Da ferner $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}_s$ ein zum Primideal $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}_s$ gehöriges Primärideal ist, wird $\mathfrak{p}_s = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{S}$ nach Satz 4. Schließlich muß $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal und $\mathfrak{q}$ die zugehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ sein, weil andernfalls nicht alle $\mathfrak{q}$-Elemente durch Multiplikation mit zu $\mathfrak{p}$ primen Faktoren in Elemente von $\mathfrak{a}$ übergeführt werden könnten.

§ 2.

Multiplikativ abgeschlossene Systeme von endlichen Idealen.

Beim weiteren Ausbau der in § 1 begonnenen Untersuchungen benutzen wir die folgenden Definitionen:

Ein System Λ von endlichen Idealen (Elementsystem S) aus dem beliebigen Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ soll *m. a.* (multiplikativ abgeschlossen) bzw. *f. m. a.* (fast multiplikativ abgeschlossen) heißen, wenn es gleichzeitig mit zwei Idealen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ (Elementen a_1, a_2) stets auch $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$ ($a_1 \cdot a_2$) bzw. ein Unterideal von $\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$ (Vielfaches von $a_1 \cdot a_2$) enthält. Andrerseits soll Λ (S) *vollständig* genannt werden, wenn in Λ (S) gleichzeitig mit $\mathfrak{e}$ (a) stets auch jedes endliche Oberideal von $\mathfrak{e}$ (jeder Teiler von a) auftritt.

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$ und bedeutet S bzw. Λ irgendein m. a. oder f. m. a. System von Elementen bzw. endlichen Idealen, so verstehen wir unter dem *i. K. I.* (isolierten Komponentenideal) *im engeren Sinne* $\mathfrak{a}_S$ bzw. unter dem *i. K. I. im weiteren Sinne* $\mathfrak{a}_\Lambda$ das Ideal aller der Ringelemente a, zu denen ein Element c aus S bzw. ein Ideal $\mathfrak{e}$ aus Λ so bestimmt werden kann, daß $a \cdot c \subset \mathfrak{a}$ bzw. $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$ wird [10]). Den Übergang von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{a}_S$ bzw. $\mathfrak{a}_\Lambda$ (für beliebiges $\mathfrak{a}$ bei festem S bzw. Λ) bezeichnen wir als die durch das System S bzw. Λ definierte S- bzw. Λ-*Operation*.

Zwei Systeme S_1, S_2 bzw. Λ_1, Λ_2 sollen *gleichwertig* genannt werden, wenn sie dieselbe S- bzw. Λ-Operation definieren, wenn also $\mathfrak{a}_{S_1} = \mathfrak{a}_{S_2}$ bzw. $\mathfrak{a}_{\Lambda_1} = \mathfrak{a}_{\Lambda_2}$ wird für jedes $\mathfrak{a}$.

[10]) Die „i. K. I. im engeren Sinne" des Textes sind nichts anderes als die „i. K. I." schlechtweg im üblichen Sinne. Vgl. z. B. KRULL[9]), Nr. 6.

Zu jedem m. a. oder f. m. a. System S bzw. A gibt es ein *zugehöriges* (kleinstes umfassendes) *vollständiges System* S^* *bzw.* A^*, nämlich das System aller der Elemente bzw. endlichen Ideale, die irgendein Element aus S teilen bzw. irgendein Ideal aus A enthalten. S^* bzw. A^* ist stets m. a., auch wenn S bzw. A nur f. m. a. war. — Offenbar sind S und S^* bzw. A und A^* stets gleichwertig. Darüber hinaus gilt:

Hilfssatz 2. *Zwei Systeme* S_1 *und* S_2 *bzw.* A_1 *und* A_2 *sind dann und nur dann gleichwertig, wenn die zugehörigen vollständigen Systeme identisch sind* ($S_1^* = S_2^*$ *bzw.* $A_1^* = A_2^*$), d. h. wenn es zu jedem Element a_1 aus S_1 bzw. zu jedem Ideal $\mathfrak{e}_1$ aus A_1 in S_2 ein Vielfaches a_2 bzw. in A_2 ein Unterideal $\mathfrak{e}_2$ gibt, und umgekehrt.

Das „dann" ist bei Hilfssatz 2 so gut wie selbstverständlich. Aber auch der Beweis des „nur dann" macht keine Schwierigkeit. Angenommen etwa, es gäbe zu dem Ideal $\mathfrak{e}_1$ aus A_1 in A_2 kein (echtes oder unechtes) Unterideal $\mathfrak{e}_2$. Dann ist offenbar $(\mathfrak{e}_1)_{A_1} = \mathfrak{R}$, $(\mathfrak{e}_1)_{A_2} \neq \mathfrak{R}$, die Systeme A_1 und A_2 sind also sicher nicht gleichwertig.

Da, wie soeben gezeigt, jedes f. m. a. System S bzw. A mit einem m. a. System gleichwertig ist, hätten wir uns bei der Definition der i. K. I. im engeren und weiteren Sinne ausschließlich auf die Betrachtung von m. a. Systemen beschränken können. Die Zulassung von f. m. a. Systemen dient nur zur Vereinfachung einiger späterer Beweise. — Dagegen kann die Einführung der m. a. Idealsysteme A [11]) neben den m. a. Elementsystemen S keinesfalls umgangen werden. Denn es gibt, wie mühelos durch Beispiele zu belegen, schon in ganz einfachen Integritätsbereichen *m. a. Idealsysteme, zu denen kein gleichwertiges m. a. Elementsystem* (d. h. kein gleichwertiges m. a. Hauptidealsystem) *existiert* [12]).

Außerdem ist zwar unmittelbar klar, daß jedes i. K. I. im engeren Sinne stets auch ein i. K. I. im weiteren Sinne darstellt; denn man kann ja statt mit m. a. Elementsystemen ebensogut mit m. a. Hauptidealsystemen arbeiten. Aber die Richtigkeit der Umkehrung konnte ich bis jetzt nur unter speziellen Voraussetzungen über den zugrunde liegenden Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ beweisen. (Vgl. die Untersuchungen von § 4, insbesondere die Schlußbemerkung) [13]).

[11]) Wenn im folgenden von einem m. a. (Ideal-) System A geredet wird, ist stets ein m. a. System von *endlichen* Idealen gemeint.

[12]) Es sei z. B. $\mathfrak{R}$ ein ganz abgeschlossener Ring mit Maximalbedingung, in dem mindestens ein nichtminimales Primideal $\mathfrak{p}$ existiert; A sei das m. a. System aller der Ideale aus $\mathfrak{R}$, die in keinem einzigen minimalen Ringprimideal enthalten sind. Dann ist kein einziges Ideal aus A Unterideal eines Hauptideals, und es gibt daher nach Hilfssatz 2 zu A kein äquivalentes Element- (d. h. Hauptideal-) System S.

[13]) Das Beispiel von Anm. [12]) hat mit unserem Problem nichts zu tun, denn es handelt sich ja um die Frage: Gibt es zu gegebenem A für jedes $\mathfrak{a}$ ein *i. a. von* $\mathfrak{a}$ *abhängiges* m. a. System $S(\mathfrak{a})$ derart, daß $\mathfrak{a}_A = \mathfrak{a}_{S(\mathfrak{a})}$ wird?

Haben nun wieder $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ dieselbe Bedeutung wie in § 1, so erhalten wir leicht:

Satz 7. *Für beliebiges* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *sind die i. K. I. im weiteren Sinne von* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *stets gleich den Erweiterunsgidealen der i. K. I. im weiteren Sinne von* $\mathfrak{a}$. — *Bei* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ *sind alle i. K. I. im weiteren Sinne gleichzeitig auch i. K. I. im engeren Sinne.*

Zum Beweis beachte man: Ist $\mathfrak{b}_s$ ein beliebiges i. K. I. im weiteren Sinne von $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ mit dem erzeugenden m. a. System A_s — $(\mathfrak{b}_s = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S})_{A_s})$ —, so bilden die Inhalte der zu A_s gehörigen endlichen Ideale in $\mathfrak{R}$ jedenfalls ein f. m. a. System A von endlichen Idealen, und aus Satz 1 und Satz 3 folgt leicht $\mathfrak{b}_s = (\mathfrak{a}_A) \cdot \mathfrak{S}$. — Ist andrerseits $\mathfrak{b}$ ein beliebiges i. K. I. im weiteren Sinne von $\mathfrak{a}$, und ist A^* ein erzeugendes, vollständiges m. a. System von endlichen Idealen, so bildet, wie mühelos aus Hilfssatz 1 zu entnehmen, die Menge aller Polynome $p(u)$ mit zu A^* gehörigem Inhalt in $\mathfrak{S}$ ein m. a. Elementsystem S_s, und man überzeugt sich ohne Schwierigkeit von der Gültigkeit der Gleichung $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{S} = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S})_{S_s}$. — Satz 7 bedeutet den vorläufigen Abschluß der in § 1 begonnenen Untersuchungen.

§ 3.

Verallgemeinerung der Ergebnisse von § 1.

Mit Hilfe des in § 2 eingeführten Begriffs des m. a. Idealsystems A kann der Geltungsbereich der Sätze 1 bis 7 wesentlich erweitert werden. $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ sollen die gleiche Bedeutung haben wie bisher, mit $\mathfrak{Q}$ bezeichnen wir einen beliebigen Quotientenring von $\mathfrak{P}$, mit S_q ein erzeugendes m. a. Elementsystem von $\mathfrak{Q}$ über $\mathfrak{P}$ (also ein Elementsystem aus $\mathfrak{P}$ derart, daß $\mathfrak{Q}$ aus der Menge aller Quotienten $\frac{p}{q}$ $(p \subset \mathfrak{P},\ q \subset S_q)$ besteht). Dann bilden die Inhalte aller zu S_q gehörigen Polynome in $\mathfrak{R}$ ein f. m. a. System A'; bedeutet A^* das zu A' gehörige vollständige m. a. System, so gilt zunächst:

Satz 8. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal aus* $\mathfrak{R}$, *so enthält* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ *alle und nur die Polynome* $q(u)$, *deren Inhalt ein Unterideal von* $\mathfrak{a}_{A^*}$ *ist.* — *Insbesondere wird stets* $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}) \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a}_{A^*}$.

In der Tat, ein beliebiges Polynom $q(u)$ aus $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ besitzt eine Darstellung:

$$q(u) = r(u)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot p_i(u) \quad (r(u) \subset S_q,\ a_i \subset \mathfrak{a},\ p_i(u) \subset \mathfrak{P}).$$

Ist $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{d}$ der Inhalt von $r(u)$ bzw. $q(u)$ bzw. $r(u) \cdot q(u)$, so ergibt sich: $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}^{m+1} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{b}^m \cdot \mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{a}$; $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}_{A^*}$ wegen $\mathfrak{b} \subset A^*$. — Ist andrerseits $c \subset \mathfrak{a}_{A^*}$, so gibt es ein $\mathfrak{b} \subset A^*$, für das $(c) \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ wird, und nach Definition

von Λ^* muß in S_q ein Polynom $v(u)$ vorkommen, dessen Inhalt $\mathfrak{c}$ ein Unterideal von $\mathfrak{b}$ ist. Man hat dann:

$$c \cdot v(u) = p(u) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{P}, \quad c = v(u)^{-1} \cdot p(u) \subset \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}.$$

Aus Satz 8 folgt wegen der für jedes $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ gültigen Gleichung $(\mathfrak{a}_{\Lambda^*})_{\Lambda^*} = \mathfrak{a}_{\Lambda^*}$ [14]): Das System R_{Λ^*} aller Ideale $\mathfrak{a}_{\Lambda^*}$ aus $\mathfrak{R}$ wird durch die Zuordnung von Erweiterungs- und Verengungsideal umkehrbar eindeutig auf das System Q_{Λ^*} aller Erweiterungsideale $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ ($\mathfrak{a}$ beliebig aus $\mathfrak{R}$) abgebildet. Darüber hinaus erhält man leicht:

Satz 9. *Für das System R_{Λ^*} aller Ideale $\mathfrak{a}_{\Lambda^*}$ aus $\mathfrak{R}$ und das System Q_{Λ^*} aller Erweiterungsideale $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{Q}$ gelten genau dieselben Sätze* 2 bis 7, *wie sie oben für das System aller $\mathfrak{R}$-Ideale und das System aller Erweiterungsideale $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{S}$ abgeleitet wurden.*

Der Beweis von Satz 3 erfordert so geringe Abänderungen der früheren Beweise, daß wir uns mit einigen Andeutungen begnügen dürfen. Man beachte: a) Es ist stets $\mathfrak{a}_{\Lambda^*} \cap \mathfrak{b}_{\Lambda^*} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})_{\Lambda^*}$. (Wichtig für die Übertragung von Satz 2). — b) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\Lambda^*}$, und bedeutet $\mathfrak{b}$ ein beliebiges Ideal, N ein beliebiges m. a. System von endlichen Idealen aus $\mathfrak{R}$, so ist stets $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})_{\Lambda^*} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$, $(\mathfrak{a}_{\mathsf{N}})_{\Lambda^*} = (\mathfrak{a}_{\Lambda^*})_{\mathsf{N}} = \mathfrak{a}_{\mathsf{N}}$. (Wichtig für die Übertragung der Sätze 3 und 7.) [15]) — c) Für das Primärideal $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{R}$ wird dann und nur dann $\mathfrak{q}_{\Lambda^*} = \mathfrak{q}$, wenn das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ kein Ideal aus Λ^* enthält. Ist $\mathfrak{a}_{\Lambda^*} = \mathfrak{a}$, so wird auch $\mathfrak{q}_{\Lambda^*} = \mathfrak{q}$ für jede isolierte Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$. (Für die Übertragung von Satz 4 und Satz 5.)

Bis jetzt waren wir vom Ringe $\mathfrak{Q}$ ausgegangen und hatten mit seiner Hilfe das Idealsystem Λ^* definiert. Man kann aber auch umgekehrt ein ganz beliebiges vollständiges m. a. System Λ^* von endlichen Idealen in $\mathfrak{R}$ auszeichnen und zu Λ^* das vollständige m. a. Elementsystem S_q^* aller Polynome $v(u)$ mit zu Λ^* gehörigem Inhalt, sowie den durch S_q^* erzeugten Quotientenring $\mathfrak{Q}^*$ von $\mathfrak{P}$ bilden. *Dann gelten jedenfalls für Λ^* und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}^*$ die Sätze* 8 *und* 9. — Diese Bemerkung scheint aus dem folgenden Grunde nicht unwichtig:

Ist S^* ein vollständiges m. a. Elementsystem aus $\mathfrak{R}$, und verstehen wir unter $\mathfrak{R}_{S^*}$ den Ring aller Quotienten $\frac{a}{s}$ ($a \subset \mathfrak{R}$, $s \subset S^*$), so entsprechen die sämtlichen Ideale aus $\mathfrak{R}_{S^*}$ umkehrbar eindeutig den Idealen $\mathfrak{a}_{S^*}$ aus $\mathfrak{R}$, und man kann, statt zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ das i. K. I. $\mathfrak{a}_{S^*}$ zu bilden, ebensogut von $\mathfrak{R}$ zum Quotientenring $\mathfrak{R}_{S^*}$ übergehen.

Einem beliebigen vollständigen m. a. Idealsystem Λ^* dagegen läßt sich i. a. nicht in gleicher Weise ein aus Quotienten von $\mathfrak{R}$-Elementen gebildeter

[14]) Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Λ nur endliche Ideale enthält, leicht zu verifizieren. Vgl. § 5, Beweis von Satz 14, Abschnitt b).

[15]) Einfache Verifikationen. Vgl. § 6, Beweis von Satz 16, Abschnitt b).

Ring $\mathfrak{R}_{\Lambda^*}$ zuordnen. Hier liefert nun auf Grund von Satz 8 und Satz 9 der Polynomquotientenring $\mathfrak{Q}^*$ einen gewissen Ersatz für den fehlenden Ring $\mathfrak{R}_{\Lambda^*}$. — Man könnte mit einigem Recht sagen, es handle sich bei der Konstruktion von $\mathfrak{Q}^*$ um die Bildung eines zum Λ^*-Idealsystem gehörigen „*Funktionalrings*“ im Sinne von Kronecker. Doch werden wir diese Ausdrucksweise lieber vermeiden, da sie sich nicht genau mit der Terminologie der früheren Beiträge deckt. Die Bedeutung der m. a. Idealsysteme für die Theorie der Kroneckerschen Funktionalringe im Sinne von Beitrag I wird in § 6 genauer untersucht werden.

§ 4.

Eine Zwischenuntersuchung.

Das Ideal $\mathfrak{c}$ möge *zu* $\mathfrak{a}$ *idealprim* genannt werden, wenn $\mathfrak{a} : \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ ist. Dagegen soll, wie üblich, $\mathfrak{c}$ nur dann *zu* $\mathfrak{a}$ *prim* heißen, wenn $\mathfrak{c}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element enthält, wenn also $\mathfrak{a} : (c) = \mathfrak{a}$ wird für geeignetes $c \subset \mathfrak{c}$. Bei der Entwicklung der Idealtheorie beliebiger Integritätsbereiche ist es häufig lästig, daß die Begriffe „idealprim“ und „prim“ schlechtweg verschiedenen Umfang besitzen; bei den Ringen mit Maximalbedingung dagegen, in denen alle Ideale endlich sind, tritt eine solche Schwierigkeit nicht auf, und diese Beobachtung führt auf den Gedanken, ob nicht möglicherweise in jedem Integritätsbereich $\mathfrak{R}$ für jedes *endliche* Ideal $\mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ die Existenz eines $c \subset \mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{a} : (c) = \mathfrak{a}$ folgt. Daß diese Vermutung mit gewissen Überlegungen aus § 2 eng zusammenhängt, zeigt

Satz 10. *Ist in* $\mathfrak{R}$ *für beliebiges* $\mathfrak{a}$ *jedes zu* $\mathfrak{a}$ *idealprime endliche Ideal stets auch zu* $\mathfrak{a}$ *prim, so sind in* $\mathfrak{R}$ *alle i. K. I. im weiteren Sinne auch i. K. I. im engeren Sinne.*

In der Tat, es sei in $\mathfrak{R}$ irgendein Ideal $\mathfrak{a}$ und irgendein m. a. System Λ gegeben, und es bedeute S das m. a. System aller zu $\mathfrak{a}_\Lambda$ primen Elemente. Dann ist jedenfalls $\mathfrak{a}_S \subseteq \mathfrak{a}_\Lambda$, denn wir haben $(\mathfrak{a}_\Lambda)_S = \mathfrak{a}_\Lambda$ und aus $a \cdot s \subset \mathfrak{a}$ folgt $a \cdot s \subset \mathfrak{a}_\Lambda$, $a \subset \mathfrak{a}_\Lambda$. Andrerseits ist aber auch $\mathfrak{a}_S \supseteq \mathfrak{a}_\Lambda$. Ist nämlich $a \subset \mathfrak{a}_\Lambda$, gilt also eine Beziehung $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{e} \subset \Lambda$), so ist $\mathfrak{a}_\Lambda : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}_\Lambda$ wegen $(\mathfrak{a}_\Lambda)_\Lambda = \mathfrak{a}_\Lambda$; es enthält also $\mathfrak{e}$ nach Voraussetzung ein zu $\mathfrak{a}_\Lambda$ primes Element $s \subset S$, für das selbstverständlich $a \cdot s \subset \mathfrak{a}$ sein muß, d. h. es ist $a \subset \mathfrak{a}_S$. — Mit Rücksicht auf Satz 10 sollen jetzt über die Ringe mit Maximalbedingung hinaus weitere Ringklassen aufgesucht werden, in denen bei endlichen Idealen die Begriffe „idealprim“ und „prim“ inhaltlich gleichwertig sind. Als Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen wählen wir das folgende

Lemma. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal, das kein Ideal* $\mathfrak{e}$ *(kein Element* a*) aus dem m. a. System* $\Lambda(S)$ *enthält. Dann gibt es stets mindestens ein „maxi-*

ales Primoberideal" $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{a}$ *„hinsichtlich* Λ *(*S*)", das seinerseits gleichfalls ein* $\mathfrak{e}$ *aus* Λ *(*a *aus* S*) enthält, während in jedem echten Oberideal von* $\mathfrak{p}$ *mindestens in zu* Λ *gehöriges Unterideal (zu* S *gehöriges Element) auftritt.*

Der Beweis des Lemmas kann im Falle eines Idealsystems Λ genau so eführt werden wie im wohlbekannten Falle eines Elementsystems S [5]). Vesentlich für die entscheidende transfinite Konstruktion ist die folgende emerkung: Ist $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_\sigma \subset \cdots$ eine wohlgeordnete Oberideal-ette, bei der kein einziges Glied das *endliche* Ideal $\mathfrak{e}$ enthält, so enthält auch ie Summe aller $\mathfrak{a}_\sigma$ das Ideal $\mathfrak{e}$ nicht [16]). — Wir definieren jetzt:

Unter einem *element-maximalen* bzw. *ideal-maximalen Primoberideal von* $\mathfrak{a}$ oll ein maximales Primoberideal von $\mathfrak{a}$ hinsichtlich des Systems $\overline{S}$ $(\mathfrak{a})$ bzw. $(\mathfrak{a})$ aller zu $\mathfrak{a}$ primen Elemente bzw. aller zu $\mathfrak{a}$ idealprimen endlichen Ideale erstanden werden [17]). — Aus dem Lemma folgt sofort:

Jedes Ideal $\mathfrak{c}$, das kein zu $\mathfrak{a}$ primes Element bzw. kein zu $\mathfrak{a}$ idealprimes ndliches Ideal enthält, ist seinerseits in mindestens einem element-maximalen zw. ideal-maximalen Primoberideal von $\mathfrak{a}$ enthalten. — Weiter ergibt sich eicht:

Hilfssatz 3. a) *Zwei verschiedene element-maximale (ideal-maximale) Primoberideale von* $\mathfrak{a}$ *sind stets gegenseitig prim.* b) *Jedes ideal-maximale Primoberideal von* $\mathfrak{a}$ *ist (echtes oder unechtes) Unterideal mindestens eines ement-maximalen Primoberideals.* c) *Jedes Element eines element-maximalen Primoberideals von* $\mathfrak{a}$ *liegt in mindestens einem ideal-maximalen Primoberideal.*) *Ist jedes element-maximale Primoberideal von* $\mathfrak{a}$ *gleichzeitig ideal-maximal, ist auch umgekehrt jedes ideal-maximale Primoberideal gleichzeitig element-aximal* [18]).

In der Tat, a) ist trivial. Bei b) bzw. c) beachte man, daß ein ideal-aximales Primoberideal von $\mathfrak{a}$ kein zu $\mathfrak{a}$ primes Hauptideal, d. h. kein zu $\mathfrak{a}$ rimes Element enthält, bzw. daß jedes Element aus einem element-maximalen rimoberideal von $\mathfrak{a}$ die Basis eines zu $\mathfrak{a}$ nichtprimen Hauptideals darstellt. ehauptung d) ist eine einfache Folgerung aus den Behauptungen a) und b). —

[16]) Daß das Lemma nicht dadurch verallgemeinert werden kann, daß man an Stelle nes m. a. Systems Λ von *endlichen* Idealen ein beliebiges m. a. Idealsystem M setzt, igt folgendes Beispiel: Es sei $\mathfrak{p}$ ein (sicher nicht endliches) Primideal, das der Gleichung $= \mathfrak{p}$ genügt, $\mathfrak{q}$ sei ein echtes zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal. Dann bildet $\mathfrak{p}$ für sich allein n m. a.-System M, und es gibt kein maximales Primoberideal von $\mathfrak{q}$ hinsichtlich M.

[17]) Die element-maximalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$ sind identisch mit den maximalen chtprimen Oberidealen von $\mathfrak{a}$ im Sinne von KRULL[9]) Nr. 7, S. 16. Die ideal-maximalen rimoberideale wurden m. W. bisher noch nirgends eingeführt.

[18]) Der umgekehrte Satz, daß jedes element-maximale Primoberideal von $\mathfrak{a}$ gleich-itig ideal-maximal sein muß, falls jedes ideal-maximale Primoberideal gleichzeitig ement-maximal ist, scheint mir zum mindesten nicht selbstverständlich.

Die Bedeutung der maximalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$ für die Ausgangsfragestellung von § 4 zeigt

Satz 11. *Dann und nur dann, wenn in $\mathfrak{R}$ für jedes $\mathfrak{a}$ alle element-maximalen* Primoberideale *gleichzeitig ideal-maximal sind, enthält jedes zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ idealprime endliche Ideal $\mathfrak{e}$ stets ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element.*

Ist nämlich einerseits $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$, ohne daß $\mathfrak{e}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element enthält, so liegt $\mathfrak{e}$ in mindestens einem element-maximalen Primoberideal von $\mathfrak{a}$, das eben wegen $\mathfrak{e} \subset \mathfrak{p}$ nicht auch gleichzeitig ideal-maximal sein kann. Ist andrerseits das Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ element-, aber nicht ideal-maximal, so enthält $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ idealprimes endliches Ideal $\mathfrak{e}$, das als Unterideal von $\mathfrak{p}$ ausschließlich aus zu $\mathfrak{a}$ nichtprimen Elementen besteht. — Mit Hilfe des Lemmas und des Satzes 11 beweisen wir jetzt:

Satz 12. *Im Ringe $\mathfrak{R}$ ist jedes zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ idealprime endliche Ideal $\mathfrak{e}$ gleichzeitig zu $\mathfrak{a}$ prim,* a) *wenn es in $\mathfrak{R}$ keine unendliche Folge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ von gegenseitig primen Primidealen gibt, und* b) *wenn $\mathfrak{R}$ einartig ist, wenn also in $\mathfrak{R}$ kein Primideal ein (von $\mathfrak{R}$ selbst verschiedenes) echtes Oberideal besitzt.*

In der Tat, unter der Voraussetzung a) besitzt ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ nach Hilfssatz 3a) sicher nur endlich viele ideal-maximale Primoberideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$. Ist nun $\mathfrak{p}$ irgendein element-maximales Primoberideal von $\mathfrak{a}$, so muß $\mathfrak{p}$ in einem der Ideale $\mathfrak{p}_i$, etwa in $\mathfrak{p}_1$, enthalten sein, weil es andernfalls nach einem bekannten Schlusse im Widerspruch zu Hilfssatz 3 c) in $\mathfrak{p}$ mindestens ein Element p geben müßte, das in keinem der endlich vielen Primideale $\mathfrak{p}_i$ vorkäme. Aus $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_1$ folgt aber nach Hilfssatz 3 a), b) sofort $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. D. h. es ist in $\mathfrak{R}$ bei jedem Ideal $\mathfrak{a}$ jedes element-maximale Primoberideal gleichzeitig ideal-maximal, man kann also Satz 11 anwenden.

Es sei andrerseits $\mathfrak{R}$ einartig, $\mathfrak{a}$ sei ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{e}$ ein endliches Ideal, das ausschließlich aus zu $\mathfrak{a}$ nichtprimen Elementen besteht; dann ist $\mathfrak{e}$ nach dem Lemma in mindestens einem element-maximalen Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ enthalten. Wegen der Einartigkeit von $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primoberideal von $\mathfrak{a}$, und wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{e}$ muß für hinreichend großes ϱ das endliche Ideal $\mathfrak{e}^\varrho = (c_1, \ldots, c_m)$ in der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen isolierten Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$ enthalten sein. Nach einer Grundeigenschaft der isolierten Primärkomponenten[9]) gibt es dann zu jedem c_i ein nicht in $\mathfrak{p}$ liegendes r_i, derart, daß $c_i \cdot r_i \subset \mathfrak{a}$ wird, und für $r = r_1 \cdot \ldots \cdot r_m$ haben wir $r \notin \mathfrak{p}$, $r \notin \mathfrak{a}$, $(r) \cdot \mathfrak{e}^\varrho \subset \mathfrak{a}$. Es ist also $\mathfrak{a} : \mathfrak{e}^\varrho \neq \mathfrak{a}$ und damit auch $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} \neq \mathfrak{a}$, d. h.: Das endliche Ideal $\mathfrak{e}$ ist sicher *nicht* zu $\mathfrak{a}$ idealprim, wenn es kein zu $\mathfrak{a}$ primes Element enthält.

Satz 12a) scheint mir vor allem deshalb bemerkenswert, weil in keinem Ringe, der sich als Durchschnitt von endlich vielen Bewertungsringen be-

iebigen Typs darstellen läßt, eine unendliche Folge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ von gegen-eitig primen Primidealen existiert[19]). Im übrigen sieht man sofort, daß las Ergebnis von Satz 12 a) folgendermaßen verallgemeinert werden kann:

Besitzt in einem beliebigen Ringe $\mathfrak{R}$ ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ nur endlich viele ideal-maximale Primoberideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, so stellen die $\mathfrak{p}_i$ gleichzeitig die sämtlichen element-maximalen Primoberideale von $\mathfrak{a}$ dar, und es enthält edes zu $\mathfrak{a}$ idealprime endliche Ideal $\mathfrak{e}$ ein zu $\mathfrak{a}$ primes Element.

Unsere Resultate zeigen, daß es ziemlich schwierig sein dürfte, ein Ideal $\mathfrak{a}$ u finden, zu dem ein endliches Ideal $\mathfrak{e}$ existiert, das der Gleichung $\mathfrak{a} : \mathfrak{e} = \mathfrak{a}$ genügt, ohne zu $\mathfrak{a}$ prim zu sein; andrerseits aber reichen sie m. E. doch nicht aus, um die Wahrscheinlichkeit der Vermutung, daß die Begriffe „idealprim" und „prim" bei endlichen Idealen in *allen* Ringen inhaltlich identisch sind, wesentlich zu erhöhen. Auch die Frage, ob etwa *immer* jedes i. K. I. im weiteren Sinne stets auch ein i. K. I. im engeren Sinne darstellt, muß daher trotz Satz 10 völlig offen bleiben.

§ 5.

Λ-Operationen als $'$-Operationen.

In § 5 soll gezeigt werden, daß mit Hilfe des Begriffes des m. a. Systems Λ die in Beitrag I, § 10 gewonnenen Ergebnisse unter starker Vereinfachung der Beweise beträchtlich verallgemeinert werden können[20]). Wie in Beitrag I definieren wir:

Ist jedem ganzen oder nichtganzen Ideal $\mathfrak{a}$ des Integritätsbereichs $\mathfrak{R}$ eindeutig ein Oberideal $\mathfrak{a}'$ zugeordnet, so soll von einer $'$-Operation gesprochen werden, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}$. (2) $\mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{a}$; aus $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{b}'$. (3) $(\mathfrak{a}')' = \mathfrak{a}$.

(4) $(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')' = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})'$. (5) $(\mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}')' = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})'$. (6) $(\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}')' = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}'$.

(7) $(a)' = (a)$; $((a) \cdot \mathfrak{a})' = (a) \cdot \mathfrak{a}'$.

Die Formeln (1) bis (7), die einschließlich der Anordnung unverändert aus Beitrag I übernommen wurden, stellen keine untereinander unabhängigen Bedingungen dar. Vielmehr gilt:

Formel (2) *ergibt sich als Spezialfall aus Formel* (4), *wenn man* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *setzt. Formel* (6) *ist eine einfache Folgerung aus den Formeln* (2) *und* (3).

[19]) Der Beweis dieser Behauptung kann z. B. leicht mit Hilfe des „Hauptsatzes" von KRULL[9]) Nr. 41, S. 115 erbracht werden.

[20]) Auf die Einzelheiten der Untersuchungen von Beitrag I wird nicht zurückgegriffen, auch werden die wichtigsten Definitionen kurz wiederholt. Vorausgesetzt wird nur eine gewisse grundsätzliche Vertrautheit mit den Gedankengängen von Beitrag I.

In der Tat, die erste Behauptung ist wegen $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}' + \mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'$ trivial. Ist andrerseits $a \subset (\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}')'$, so ist nach (3) erst recht $a \subset (\mathfrak{a}')' \cap (\mathfrak{b}')'$ und nach (2) wird $(\mathfrak{a}')' \cap (\mathfrak{b}')' = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}'$. — *Man hat also für eine '-Operation nur die Gültigkeit der Formeln* (1), (3), (4), (5), (7) *zu beweisen.* Dabei sind in den von uns betrachteten Fällen (1) und (3) so gut wie selbstverständlich, (7) macht keine nennenswerten Schwierigkeiten, und die Beweise von (4) und (5) laufen streng parallel. So konzentriert sich im folgenden das Hauptinteresse auf Formel (4), wobei wegen (3) natürlich nur gezeigt werden muß, daß $(\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}')' \subseteq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})'$ ist [21]). — Wichtiger noch als diese Bemerkungen ist für uns

Satz 13. *Ist im Bereich aller ganzen Ideale von* $\mathfrak{R}$ *eine den Bedingungen* (1) *bis* (7) *genügende '-Operation erklärt, so kann diese Operation stets in einer und nur einer Weise unter Erhaltung der Allgemeingültigkeit der Formeln* (1) *bis* (7) *auf die nichtganzen Ideale von* $\mathfrak{R}$ *ausgedehnt werden, und zwar hat man durchweg*

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{g}' \cdot (a^{-1})$$

zu setzen, falls das Ideal $\mathfrak{a}$ *in der Form* $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \cdot (a^{-1})$ *mit ganzem* $\mathfrak{g}$ *und ganzem* $\mathfrak{a}$ *dargestellt werden kann.*

Zum Beweis hat man nur zu zeigen, daß die in Satz 13 angegebene Definition der '-Operation für nichtganze Ideale eindeutig ist; die Verifikation der Allgemeingültigkeit der Formeln (1) bis (7) ist dann trivial. Es sei nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_1 \cdot (a_1^{-1}) = \mathfrak{g}_2 \cdot (a_2^{-1})$. Dann ist $(a_2) \cdot \mathfrak{g}_1 = (a_1) \cdot \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h}$ ganz und damit nach der voraussetzungsgemäß für ganze Ideale geltenden Formel (7): $(a_2) \cdot \mathfrak{g}_1' = (a_1) \cdot \mathfrak{g}_2'$, $(a_1^{-1}) \cdot \mathfrak{g}_1' = (a_2^{-1}) \cdot \mathfrak{g}_2'$. — Angesichts von Satz 13 dürfen und wollen wir uns im folgenden, ebenso wie in § 1 bis 4, ausschließlich auf ganze Ideale beschränken.

Satz 14. *Ist in* $\mathfrak{R}$ *ein festes m. a. Idealsystem* $\mathfrak{A}$ *gegeben, und ordnen wir jedem Ideal* $\mathfrak{a}$ *aus* $\mathfrak{R}$ *das Oberideal* $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_\mathfrak{A}$ *zu, so entsteht auf diese Weise dann (und selbstverständlich auch nur dann) eine '-Operation, wenn für ein beliebiges Hauptideal* (a) *aus* $\mathfrak{R}$ *stets* $(a)' = (a)$ *wird.*

Zum Beweis beachte man: a) Die Gültigkeit der Formeln (1) und (3) ist selbstverständlich. — b) Es sei $a \subset (\mathfrak{a}_\mathfrak{A} + \mathfrak{b}_\mathfrak{A})_\mathfrak{A}$. Dann gibt es in $\mathfrak{A}$ ein $\mathfrak{e}'$, für das $(a) \cdot \mathfrak{e}' \subset \mathfrak{a}_\mathfrak{A} + \mathfrak{b}_\mathfrak{A}$ wird, und wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{e}'$ gilt sogar eine Beziehung $(a) \cdot \mathfrak{e}' \subset \bar{\mathfrak{e}}_1 + \bar{\mathfrak{e}}_2$, wobei $\bar{\mathfrak{e}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{e}}_2$ ein geeignetes endliches Unterideal von $\mathfrak{a}_\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{b}_\mathfrak{A}$ bedeutet. Weiter existieren in $\mathfrak{A}$ zwei Ideale $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ derart, daß $\bar{\mathfrak{e}}_1 \cdot \mathfrak{e}_1 \subseteq \mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{e}}_2 \cdot \mathfrak{e}_2 \subset \mathfrak{b}$ wird. Setzt man nun $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}' \cdot \mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}_2$,

[21]) Hier zeigt sich ein wichtiger Unterschied gegenüber LORENZEN[6]). Denn dort wird von einer '-Operation weder die Gültigkeit der Formel (3) noch der Formel (4) noch auch nur der Formel (2) gefordert. (Daß bei LORENZEN von Idealsystemen statt von '-Operationen die Rede ist, bedeutet nur einen unwesentlichen formalen Unterschied.)

so gehört $\mathfrak{e}$ zu $\mathcal{A}$ und es ist $(a) \cdot \mathfrak{e} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. D. h. aber, es ist $(\mathfrak{a}_{\mathcal{A}} + \mathfrak{b}_{\mathcal{A}})_{\mathcal{A}} \subset (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_{\mathcal{A}}$ — Formel (4)! Der Beweis von Formel (5) wird nach genau dem gleichen Schema erbracht. — c) Die Gültigkeit der ersten Formel (7) wurde ausdrücklich vorausgesetzt, man hat also nur noch die zweite Formel (7) zu beweisen. Zunächst ist jedenfalls $(a) \cdot \mathfrak{a}_{\mathcal{A}} \subset ((a) \cdot \mathfrak{a})_{\mathcal{A}}$. Ist andrerseits $b \subset ((a) \cdot \mathfrak{a})_{\mathcal{A}}$, so gibt es in $\mathcal{A}$ ein $\mathfrak{e}$ derart, daß $(b) \cdot \mathfrak{e} \subset (a) \cdot \mathfrak{a}$ wird, und daraus folgt wegen $(a)_{\mathcal{A}} = (a)$ sofort $b = a \cdot c$, $c \subset \mathfrak{a}_{\mathcal{A}}$, $b \subset (a) \cdot \mathfrak{a}_{\mathcal{A}}$.

Aus Satz 14 ergibt sich insbesondere:

Satz 15. *Ist $\mathfrak{R}$ eine endliche diskrete Hauptordnung, so stellt die $\mathcal{A}$-Idealbildung dann und nur dann eine '-Operation dar, wenn $\mathcal{A}$ kein Unterideal eines minimalen Ringprimideals enthält.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Grundeigenschaften der endlichen diskreten Hauptordnungen [22]). — Das Hauptresultat von Beitrag I, § 10, wo „$\mathcal{A}$-Operationen" in ganz abgeschlossenen Ringen mit Maximalbedingung betrachtet wurden, läßt sich leicht als Spezialfall von Satz 15 auffassen. Man hat dabei nur zu beachten, daß jeder ganz abgeschlossene Integritätsbereich mit Maximalbedingung eine spezielle endliche diskrete Hauptordnung ist, und sich zu überzeugen, daß jede „$\mathcal{A}$-Operation" im Sinne von Beitrag I, § 10 auch eine $\mathcal{A}$-Operation im Sinne des Textes ist. — Die Richtigkeit dieser letzteren Tatsache aber ergibt sich unmittelbar aus der folgenden Bemerkung:

Es sei $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Ring mit Maximalbedingung, $\overline{\mathcal{A}}$ sei eine Menge von Primidealen aus $\mathfrak{R}$, zu der gleichzeitig mit $\mathfrak{p}$ stets auch jedes echte Primoberideal von $\mathfrak{p}$ gehört. Dann bildet die Menge aller der Ideale, die in keinem nicht in $\overline{\mathcal{A}}$ vorkommenden Primideal enthalten sind, ein (vollständiges) m. a. System $\mathcal{A}$, und man erhält bei beliebig vorgegebenem $\mathfrak{a}$ das Ideal $\mathfrak{a}_{\mathcal{A}}$ einfach dadurch, daß man in einer Primärkomponentenzerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$ alle die Primärideale $\mathfrak{q}_i$ wegläßt, deren zugehörige Primideale in $\overline{\mathcal{A}}$ vorkommen.

Die zu Beginn des Paragraphen angekündigte Einordnung der Ergebnisse von Beitrag I, § 10 in unsere allgemeiner Untersuchungen ist also tatsächlich ohne nennenswerte Schwierigkeit durchführbar.

§ 6.

$w_{\mathcal{A}}$-Operationen.

Auch bei den folgenden Untersuchungen knüpfen wir an Beitrag I an. Es sollen die Ergebnisse des damaligen § 11 in geeigneter Fassung auf beliebige Integritätsbereiche ausgedehnt werden. Im Anschluß an P. Lorenzen [6]) be-

[22]) Zur Theorie der endlichen diskreten Hauptordnungen vgl. z. B. Krull[9]) Nr. 37.

zeichnen wir eine '-Operation als *endlichartig*, wenn bei jedem Ideal $\mathfrak{a}$ ausnahmslos $\mathfrak{a}'$ gleich der Summe aller $\mathfrak{e}'$ ($\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}$) ist. Eine durch ein m. a. System A definierte '-Operation ist offenbar stets endlichartig. Unser nächstes Ziel ist der Beweis von

Satz 16. *Es sei im Ringe $\mathfrak{R}$ eine feste endlichartige '-Operation gegeben, die etwa durch den Buchstaben w charakterisiert werden möge*[23]*, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_w$. Ist dann A irgendein m. a. Idealsystem aus $\mathfrak{R}$, das der Gleichung $(a)_A = (a)$ für jedes a genügt, so stellt auch die Bildung von $\mathfrak{a}_{w_A} = (\mathfrak{a}_w)_A$ in $\mathfrak{R}$ eine endlichartige '-Operation dar.*

Beim Beweis von Satz 16 stützen wir uns vor allem auf den folgenden, bereits in Beitrag I gelegentlich benutzten

Hilfssatz 4. *Bei jeder '-Operation ist für beliebiges $\mathfrak{a}$ und endliches $\mathfrak{e}$ stets $(\mathfrak{a}' : \mathfrak{e})' = \mathfrak{a}' : \mathfrak{e}$.*

In der Tat, ist etwa $\mathfrak{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, und lassen wir für den Augenblick auch nichtganze Ideale zur Betrachtung zu, so haben wir:

$$\mathfrak{a}' : \mathfrak{e} = (\mathfrak{a}' \cdot e_1^{-1}) \cap (\mathfrak{a}' \cdot e_2^{-1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{a}' \cdot e_n^{-1}) \cap \mathfrak{R},$$

und aus den Grundformeln der '-Operationen ergibt sich sofort:

$$(\mathfrak{a}' \cdot e_i^{-1})' = \mathfrak{a}' \cdot e_i^{-1}; \qquad \mathfrak{R}' = \mathfrak{R};$$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}' : \mathfrak{e})' &= ((\mathfrak{a}' \cdot e_1^{-1}) \cap (\mathfrak{a}' \cdot e_2{}^{1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{a}' \cdot e_n^{-1}) \cap \mathfrak{R})' \\ &= (\mathfrak{a}' \cdot e_1^{-1}) \cap (\mathfrak{a}' \cdot e_2^{-1}) \cap \cdots \cap (\mathfrak{a}' \cdot e_n^{-1}) \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a} : \mathfrak{e}.\end{aligned}$$

Wir wenden uns jetzt zum Beweise von Satz 16 selbst.

a) Daß $\mathfrak{R}_{w_A} = \mathfrak{R}$ wird, und daß aus $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ stets $\mathfrak{a}_{w_A} \supseteq \mathfrak{b}_{w_A}$ folgt (Formel (1) bzw. (3)), ist trivial. Ferner ergibt sich sofort:

$(\mathfrak{a} \cdot (a))_{w_A} = ((\mathfrak{a} \cdot (a))_w)_A = (\mathfrak{a}_w \cdot (a))_A = (\mathfrak{a}_w)_A \cdot (a) = \mathfrak{a}_{w_A} \cdot (a)$, — Formel (7)!

b) Von den Formeln (4) und (5) braucht wegen der Gleichartigkeit der nötigen Überlegungen nur die eine, etwa die Beziehung $(\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A})_{w_A} \subset (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_{w_A}$, bewiesen zu werden. — Zunächst hat man jedenfalls: $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_{w_A} = ((\mathfrak{a} + \mathfrak{b})_A)_A = ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_w)_A = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_A}$. Ist ferner $(\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A})_w \subseteq (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_A}$, so ist auch

$$(\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A})_{w_A} = ((\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A})_w)_A \subseteq ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_A})_A = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_A}.$$

Man braucht also nur $(\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A})_w \subseteq (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_A}$ zu beweisen. Sei etwa $c \subset (\mathfrak{a}_{w_A} + \mathfrak{b}_{w_A})_w$. Dann ist wegen der Endlichartigkeit der w-Operation

[23]) Der Buchstabe w wird zunächst nur benutzt, um mit der Bezeichnungsweise von Beitrag I in Übereinstimmung zu bleiben. Daß die zugrunde gelegte '-Operation eine *Wertidealoperation* ist, wird [implizite, vgl. Anm. [25])] erst von Satz 17 ab vorausgesetzt.

jedenfalls $c \subset \mathfrak{e}_w$ für ein geeignetes endliches Unterideal $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{a}_{w_\Delta} + \mathfrak{b}_{w_\Delta}$. Zu $\bar{\mathfrak{e}}$ aber gibt es in dem m. a. System Δ ein $\mathfrak{e}$, derart, daß $\mathfrak{e} \cdot \mathfrak{e} \subset \mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w$ wird. Wir haben somit: $c \subset ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w) : \mathfrak{e})_w \subset ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_w : \mathfrak{e})_w = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_w : \mathfrak{e} \subseteq ((\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_w)_\Delta = (\mathfrak{a}_w + \mathfrak{b}_w)_{w_\Delta}$. Fertig!

c) Nach a) und b) ist die w_Δ-Operation eine '-Operation, weil für sie die Formeln (1) bis (7) von § 5 gelten. Die w_Δ-Operation ist aber auch endlichartig. Ist nämlich $c \subset \mathfrak{a}_{w_\Delta} = (\mathfrak{a}_w)_\Delta$, so gibt es wegen der Endlichartigkeit der Δ-Operation jedenfalls ein $\bar{\mathfrak{e}} = (e_1, \ldots, e_n) \subseteq \mathfrak{a}_w$, derart, daß bereits $c \subset \mathfrak{e}_\Delta$, und zu jedem e_i existiert wegen der Endlichartigkeit der w-Operation ein $\bar{\mathfrak{e}}_i \subseteq \mathfrak{a}$ für das $e_i \subset (\bar{\mathfrak{e}}_i)_w$. Setzen wir nun $\bar{\mathfrak{e}}^* = \bar{\mathfrak{e}}_1 + \cdots + \bar{\mathfrak{e}}_n$, so wird offenbar $\bar{\mathfrak{e}}^* \subseteq \mathfrak{a}$, $c \subset (\bar{\mathfrak{e}}^*)_{w_\Delta}$.

Im Falle eines ganz abgeschlossenen Integritätsbereiches $\mathfrak{R}$ bezeichneten wir in Beitrag I eine '-Operation als „*arithmetisch brauchbar*", wenn für beliebiges endliches $\bar{\mathfrak{e}}$ aus $\bar{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{a} \subset (\bar{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{b})'$ stets $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}'$ folgt [24]). Wir beweisen nun unter Benutzung der in Satz 16 eingeführten Bezeichnungen:

Satz 17. *Ist bei ganz abgeschlossenem $\mathfrak{R}$ die w-Operation arithmetisch brauchbar, so ist es auch die w_Δ-Operation.*

In der Tat, ist $\bar{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{a} \subseteq (\bar{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{b})_{w_\Delta}$, so ist erst recht $\bar{\mathfrak{e}} \cdot (a) \subseteq (\bar{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{b})_{w_\Delta}$ für jedes $a \subset \mathfrak{a}$, und damit $\bar{\mathfrak{e}} \cdot (a) \cdot \mathfrak{e} \subset (\bar{\mathfrak{e}} \cdot \mathfrak{b})_w$ für geeignetes $\mathfrak{e}$ aus Δ. Wegen der arithmetischen Brauchbarkeit der w-Operation folgt daraus weiter: $(a) \cdot \mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{b}_w$, $a \subset \mathfrak{b}_{w_\Delta}$. —

Von jetzt ab setzen wir durchweg voraus, daß $\mathfrak{R}$ ganz abgeschlossen und die w-Operation arithmetisch brauchbar ist. Bedeutet $\mathfrak{K}$ den Quotientenkörper von $\mathfrak{R}$, $\widetilde{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}(u)$ einen einfach transzendenten Oberkörper von $\mathfrak{K}$, so entspricht sowohl der w- als auch der w_Δ-Operation in $\widetilde{\mathfrak{K}}$ ein bestimmter „KRONECKER*scher Funktionalring*" $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Delta}$; dabei besteht $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ bzw. $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Delta}$ aus allen und nur den Polynomquotienten $\dfrac{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \cdots + b_m u^m}$, bei denen $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subseteq (b_0, b_1, \ldots, b_m)_w$ bzw. $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subseteq (b_0, b_1, \ldots, b_m)_{w_\Delta}$ ist, und es wird $\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{a}_w$, $\mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Delta} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{a}_{w_\Delta}$ für jedes $\mathfrak{R}$-Ideal $\mathfrak{a}$ [25]).

---

[24]) In der Ausdrucksweise von LORENZEN [6]) wäre $\mathfrak{R}$ als '-*abgeschlossen* zu bezeichnen.

[25]) Daß auch für die nichtendlichen Ideale von $\mathfrak{R}$ stets $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \cap \mathfrak{K}$ ($\mathfrak{a}_{w_\Delta} = \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_{w_\Delta} \cap \mathfrak{K}$) sein muß, folgt aus der Endlichartigkeit der w- (w_Δ-) Operation. — Aus der Allgemeingültigkeit der Formel $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_w \cap \mathfrak{K}$ ergibt sich leicht, *daß jede arithmetisch brauchbare; endlichartige w-Operation eine Wertidealoperation sein muß.* Sind nämlich $\widetilde{\mathfrak{B}}_1, \widetilde{\mathfrak{B}}_2, \ldots, \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau, \ldots$ die sämtlichen Bewertungsoberringe von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ im zugehörigen Quotientenkörper $\widetilde{\mathfrak{R}}$ und setzt man durchweg $\mathfrak{B}_\tau = \widetilde{\mathfrak{B}}_\tau \cap \mathfrak{K}$, so wird all-

Satz 18. *$\mathfrak{\widetilde{M}}_{w_A}$ ist gerade derjenige Quotientenring von $\mathfrak{\widetilde{M}}_w$, der durch das f. m. a. System aller Polynome $p(u) = e_0 + e_1 u + \cdots + e_m u^m$ mit zu A gehörigem Inhalt erzeugt wird.*

Zum Beweis hat man nur zu beachten: a) Wegen $\mathfrak{a}_{w_A} \supset \mathfrak{a}_w$ ist jedenfalls $\mathfrak{\widetilde{M}}_{w_A} \supseteq \mathfrak{\widetilde{M}}_w$. — b) Ist $(e_0, e_1, \ldots, e_m)$ ein Ideal aus A, so ist $(e_0, e_1, \ldots, e_m)_A = \mathfrak{R}$ und damit $\dfrac{1}{e_0 + e_1 u + \cdots + e_m u^m} \subset \mathfrak{M}_{w_A}$ nach Definition von $\mathfrak{\widetilde{M}}_{w_A}$. — c) Ist $\dfrac{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \cdots + b_m u^m} \subset \mathfrak{\widetilde{M}}_{w_A}$ und somit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subseteq (b_0, b_1, \ldots, b_m)_{w_A}$, so gibt es in A ein Ideal $(e_0, e_1, \ldots, e_r)$, derart, daß $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \cdot (e_0, e_1, \ldots, e_r) \subseteq (b_0, b_1, \ldots, b_m)_w$ wird. D. h. aber, es ist $\dfrac{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \cdots + b_m u^m} \cdot (e_0 + e_1 u + \cdots + e_r u^r) \subset \mathfrak{\widetilde{M}}_w$, und es gehört somit wegen $e_0 + e_1 u + \cdots + e_r u^r \subset S_A$ sicher $\dfrac{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + \cdots + b_m u^m}$ zu dem durch S_A erzeugten Quotientenring von $\mathfrak{\widetilde{M}}_w$.

Satz 18 läßt sich in gewissem Sinne umkehren:

Satz 19. *Es sei S_u ein beliebiges m. a. System von Polynomen $p(u) = e_0 + e_1 u + \cdots + e_r u^r$ aus $\mathfrak{\widetilde{M}}_w$, A^* sei das vollständige m. a. System aller der endlichen Ideale aus $\mathfrak{R}$, die den Inhalt mindestens eines zu S_u gehörigen Polynoms enthalten, $\mathfrak{\widetilde{R}}$ bedeute den durch S_u erzeugten Quotientenring von $\mathfrak{\widetilde{M}}_w$. Genügt dann $\mathfrak{\widetilde{R}}$ der Gleichung $\mathfrak{\widetilde{R}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$, so definiert A^* in $\mathfrak{R}$ eine arithmetisch brauchbare w_{A^*}-Operation, deren zugeordneter* Kronecker*scher Funktionalring $\mathfrak{\widetilde{R}} = \mathfrak{\widetilde{M}}_{w_{A^*}}$ ist.*

a) Um zu beweisen, daß zu A^* in $\mathfrak{R}$ eine arithmetisch brauchbare w_{A^*}-Operation gehört, braucht man nach Satz 16 und 17 nur zu zeigen, daß durchweg $(a)_{A^*} = (a)$ ist. Sei nun $c \subset (a)_{A^*}$, also $(c) \cdot \mathfrak{e} \subset \mathfrak{a}$ für geeignetes $\mathfrak{e}$ aus A^*; dann gibt es in S_u ein Polynom $p(u)$, dessen Inhalt in $\mathfrak{e}$ enthalten ist, so daß $\dfrac{c}{a} \cdot p(u) = q(u)$ lauter zu $\mathfrak{R}$ gehörige Koeffizienten besitzt und somit

---

gemein $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{\widetilde{M}}_w \cap \mathfrak{R} = \underset{\tau}{A} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau)$. Denn aus den Grundeigenschaften der Bewertungsringe folgt sofort $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{\widetilde{B}}_\tau \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau$, und nach Beitrag I, S. 555, wird $\mathfrak{\tilde{a}} = \underset{\tau}{A} \mathfrak{\tilde{a}} \cdot \mathfrak{\widetilde{B}}_\tau$ für jedes Ideal $\mathfrak{\tilde{a}}$ aus $\mathfrak{\widetilde{M}}$. Man hat also: $\mathfrak{a}_w = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{\widetilde{M}}_w \cap \mathfrak{R} = (\underset{\tau}{A} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{\widetilde{M}}_w \cdot \mathfrak{\widetilde{B}}_\tau)) \cap \mathfrak{R} = (\underset{\tau}{A} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{\widetilde{B}}_\tau)) \cap \mathfrak{R} = \underset{\tau}{A} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{\widetilde{B}}_\tau \cap \mathfrak{R}) = \underset{\tau}{A} (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}_\tau)$. — [Beweis zwar für die Textuntersuchungen unwesentlich, aber kurz rekapituliert, da der erst in Lorenzen[6]) (S. 547 f.) bewiesene Satz in Beitrag I noch fehlte.]

sicher in $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ vorkommt. Daraus folgt aber sofort: $\frac{c}{a} = \frac{q(u)}{p(u)} \subset \widetilde{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$, $c \subset (a)$. Die Bedingung $(a)_{\Delta^*} = (a)$ ist also erfüllt.

b) Nach Satz 18 ist jedenfalls $\widetilde{\mathfrak{M}}_{w_{\Delta^*}} \supset \widetilde{\mathfrak{N}}$; es muß aber auch $\widetilde{\mathfrak{N}} \supset \widetilde{\mathfrak{M}}_{w_{\Delta^*}}$ sein. Ist nämlich $q(u)$ irgendein u-Polynom mit zu Δ^* gehörigem Inhalt $\mathfrak{e}$, so gibt es in S_u ein Polynom $p(u)$, dessen Inhalt ein Unterideal von $\mathfrak{e}$ darstellt, und aus der Definition von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ folgt sofort, daß $p(u)$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$ durch $q(u)$ teilbar ist. — Satz 18 und Satz 19 lassen sich zusammenfassen zu

Satz 20. *Die sämtlichen w_Δ-Operationen, die aus einer festen, arithmetisch brauchbaren, endlichartigen w-Operation abgeleitet werden können, entsprechen umkehrbar eindeutig denjenigen Quotientenringen von $\widetilde{\mathfrak{M}}_\Delta$, die durch m. a. Systeme von u-Polynomen erzeugt werden können und mit $\mathfrak{R}$ den genauen Durchschnitt $\mathfrak{R}$ haben.*

Satz 16 bis 20 stellen zusammengenommen eine wichtige und in gewissem Sinne abschließende Verallgemeinerung der Ergebnisse von Beitrag I, § 11 dar, wo mit der damaligen, weniger günstigen Definition der Δ-Operationen nur der Fall der ganz abgeschlossenen Integritätsbereiche mit Maximalbedingung erledigt werden konnte. Auch die Sätze von Beitrag I, § 12 lassen sich unter Satz 16 bis 20 unterordnen. Man hat nur als w-Operation speziell die — nach Lorenzen stets endlichartige [26]) — b-Operation zu wählen und sich zu überzeugen, daß jede b_Δ-Operation im Sinne von Beitrag I nicht nur mit Hilfe einer geeigneten Primidealmenge, sondern auch mit Hilfe eines geeigneten m. a. Systems Δ aus $\mathfrak{R}$ definiert werden kann. Im übrigen erscheinen die Ergebnisse von Beitrag I, § 12 von dem nunmehr erreichten Standpunkt aus insofern als unvollkommen, als damals die b_Δ-Operationen *nur* auf dem Umweg über den Funktionalring $\widetilde{\mathfrak{M}}_b$ eingeführt werden konnten, während wir jetzt imstande sind, jede beliebige w_Δ-Operation unmittelbar in $\mathfrak{R}$ zu definieren. Auch die Bestimmung *aller* der Oberringe von $\widetilde{\mathfrak{M}}_w$, die Funktionalringe von w_Δ-Operationen sind, bedeutet selbst im Spezialfall $\widetilde{\mathfrak{M}}_w = \widetilde{\mathfrak{M}}_b$ einen wesentlichen Fortschritt über Beitrag I hinaus.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß die Sätze 13 und 14 von § 5 sowie Hilfssatz 4 und die Sätze 16 und 17 von § 6 einschließlich ihrer Beweise wörtlich auch dann noch gelten, wenn man als Ausgangsidealsystem nicht wie bisher die üblichen „Dedekindschen“ Ideale, sondern die „*s-Ideale*“ im Sinne von P. Lorenzen [6]) wählt. Man hat dann nur bei der Idealdefinition die Forderung, daß ein Ideal gleichzeitig mit α und β stets auch $\alpha + \beta$ enthalten soll, wegzulassen und die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ bzw. das Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ gleich

[26]) Da nämlich die endlichartige Prüfersche a-Operation nach Lorenzen eine w-Operation ist [vgl. Anm. [25])], muß sie notwendig mit der b-Operation identisch sein.

der Vereinigungsmenge von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bzw. gleich der Menge aller Produkte $\alpha \cdot \beta$ ($\alpha \subset \mathfrak{a}$, $\beta \subset \mathfrak{b}$) zu setzen [27]). Im übrigen braucht auch an den zugrunde gelegten Definitionen gar nichts geändert zu werden. Der Fall der Dedekindschen Ideale ordnet sich in den erweiterten Rahmen von selbst ein, da, wie unmittelbar zu sehen, der Übergang von den s- zu den Dedekindschen Idealen eine $'$-Operation im Sinne von § 5 darstellt.

Das Hauptergebnis des verallgemeinerten Ansatzes ist die Feststellung, *daß die Sätze* 13, 14, 16, 17 *sowie Hilfssatz* 4 *nicht nur für Integritätsbereiche, sondern darüber hinaus auch für beliebige* (kommutative, multiplikativ geschriebene) *Halbgruppen gelten.*

Denn die Einführung der s-Ideale ist in jeder Halbgruppe möglich, und es wird bei den einschlägigen Sätzen einschließlich ihrer Beweise nirgends von der Addition der Ringelemente Gebrauch gemacht. — Was die nicht unmittelbar auf Halbgruppen übertragbaren Sätze 18 bis 20 angeht, so gibt es zwar ein Theorem, das im Sinne der Lorenzenschen Theorie der Idealbrüche ein genaues Gegenstück zu Satz 20 darstellt. Aber seine Formulierung und sein Beweis erfordern verhältnismäßig umfangreiche Vorbereitungen. Wir gehen daher auf diesen Punkt hier nicht weiter mehr ein, behalten uns aber vor, in einem späteren Beitrag in größerem Zusammenhang ausführlich auf ihn zurückzukommen.

[27]) Ein endliches s-Ideal $\mathfrak{e} = (e_1, \ldots e_n) = (e_1) + \cdots + (e_n)$ besteht nach dieser Definition aus der Menge aller Produkte $a \cdot e_i$ (a bel. aus $\mathfrak{R}$, $i = 1, \ldots, n$).

(Eingegangen am 25. April 1942.)

Zur Theorie der Randwertaufgaben der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$.

Von

Kurt Schröder in Berlin.

Von großer Bedeutung für die mathematische Physik ist die Frage nach der Existenz einer Funktion U, die in einem einfach zusammenhängenden Gebiet R oder in dem Äußeren R_a eines solchen Gebietes — nur derartige Gebiete sollen hier betrachtet werden — mit ihren partiellen Ableitungen bis zur vierten Ordnung stetig ist und dort der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta U = 0$$

genügt, deren partielle Ableitungen erster Ordnung ferner in dem durch seine Berandung S abgeschlossenen Gebiet R bzw. R_a stetig sind und auf S vorgeschriebene Werte annehmen.

Das innere Problem für den ebenen Fall wurde in der Literatur bereits von verschiedenen Autoren mehr oder weniger vollständig behandelt, und zwar von S. Zaremba[1]) und A. Korn[2]) mit sukzessiven Approximationen, von A. Haar[3]), J. Hadamard[4]) und G. Lauricella[5]) mit Integralgleichungen und von W. Ritz[6]) und K. Friedrichs[7]) mit den direkten Methoden der

[1]) S. Zaremba, L'équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques. Bull. de l'ac. des sc. de Cracovie, 1907, S. 147—196.

[2]) A. Korn, Sur l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Ann. de l'éc. norm. **25** (1908), S. 529—583.

[3]) A. Haar, Die Randwertaufgabe der Differentialgleichung $\Delta\Delta U = 0$. Göttinger Nachr. 1907, S. 280—287.

[4]) J. Hadamard, Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mém. sav. étrang. (2) **33** (1908), Nr. 4.

[5]) G. Lauricella, Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Acta math. **32** (1909), S. 201—256. (Diese Arbeit wurde 1906 bereits als Preisschrift der Pariser Akademie eingereicht.)

[6]) W. Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Randwertaufgaben. Göttinger Nachr. 1908, S. 236—248; Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. Journ. f. Math. **135** (1908), S. 1—61.

[7]) K. Friedrichs, Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten (Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung). Math. Annalen **98** (1928), S. 205—247.

Variationsrechnung. Das dazugehörige äußere Problem wurde von G. Lauricella[8]) unter Benutzung von Integralgleichungen untersucht. Die von ihm gegebene Lösung ist aber insofern unbefriedigend, worauf zuerst N. Muschelisvili[9]) hingewiesen hat, als es neben ihr andere von dem Lauricellaschen Verfahren nicht erfaßte Lösungen geben kann, die weniger stark als sie im Unendlichen anwachsen.

Im räumlichen Fall ist bisher lediglich das innere Problem von S. Zaremba[10]), A. Korn[11]) und schließlich von G. Lauricella[12]) im Anschluß an Untersuchungen von J. Fredholm[13]) über das Hauptproblem der Elastizitätstheorie behandelt worden.

In der vorliegenden Arbeit sollen die erwähnten eleganten Untersuchungen von Lauricella wieder aufgenommen werden, zunächst mit dem Ziel, eine Reihe von darin vorhandenen Lücken auszufüllen, die Lösung für das noch nicht behandelte äußere räumliche Problem zu gewinnen und Eindeutigkeitssätze aufzustellen. Sodann aber war unser Bestreben darauf gerichtet, mit möglichst geringen Voraussetzungen über die Berandung S und die vorgegebenen Randwerte auszukommen. Die vorgenommene Erweiterung der Voraussetzungen ist jedoch nicht Selbstzweck, sondern sie dient dazu, eine Reihe von neuen Sätzen aufzustellen, die die Grundlage für einen sowohl für die allgemeine Theorie der biharmonischen Randwertaufgaben als auch für die Anwendungen wichtigen, in einer folgenden Arbeit zu beweisenden Satz bilden, welcher hinreichende Bedingungen für die Existenz der partiellen Ableitungen n-ter Ordnung von U am Rande S angibt.

Bei den Beweisen unserer Sätze können wir Methoden verwenden, wie sie in neuerer Zeit in der Potentialtheorie von J. Schauder[14]) und O. D. Kellog[15]) entwickelt wurden.

[8]) G. Lauricella, l. c. Anm. [5]).

[9]) N. Muschelišvili, Sur l'intégration de l'équation biharmonique. Bull. de l'ac. des sc. de Russie (6) **13** (1919), S. 663—686; vgl. auch N. Muschelišvili, Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la physique mathématique, Tiflis 1922, insbes. S. 98—101.

[10]) S. Zaremba, l. c. Anm. [1]).

[11]) A. Korn, Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems im Raume. Bull. de l'ac. des sc. de Cracovie 1907, S. 837—896.

[12]) G. Lauricella, Sulla integrazione dell'equazione $\Delta^4 V = 0$. Rendiconti Roma **16, II** (1907), S. 373—383.

[13]) J. Fredholm, Solution d'un problème fondamental de la theorie de l'elasticité. Arkiv för Mat. Astron. och Fys. **2**, Nr. 28 (1906).

[14]) J. Schauder, Potentialtheoretische Untersuchungen. Erste Abhandlung. Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 602—640.

[15]) O. D. Kellog, On the derivations of harmonic functions on the boundary. Transactions of the American math. soc. **33** (1931), S. 486—510.

§ 1.

Die Regularitätsvoraussetzungen über die Berandung.

1. Von der Berandung S des räumlichen Gebietes R setzen wir zunächst voraus, daß sie in jedem Punkt eine Tangentialebene hat und daß es zu jedem ihrer Punkte p eine solche Umgebung $\mathfrak{U}(p)$ gibt, daß die darin enthaltene Teilmenge S_p von S in einem rechtwinklig-kartesischen Bezugssystem x, y, z, bei dem die x, y-Ebene mit der Tangentialebene von S im Punkte p identisch ist, sich eindeutig in der Form

$$z = \varphi(x, y)$$

darstellen läßt. Dabei sollen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ stetig sein und einer in p gleichmäßigen Hölderbedingung (im folgenden kurz H-Bedingung genannt) genügen, so daß für irgendeinen weiteren Punkt q aus S_p

$$|D\varphi(q) - D\varphi(p)| \leqq A t^{\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1) \tag{1}$$

mit von p unabhängigen Konstanten A und λ gilt, wenn t die Projektion der Strecke $\overline{pq}$ auf die Tangentialebene im Punkte p ist und unter D ein Symbol für die Bildung einer partiellen Ableitung erster Ordnung verstanden wird.

Es existiert dann gleichmäßig für alle Punkte p von S eine solche positive Zahl ϱ_0, daß die lokale Flächendarstellung $z = \varphi(x, y)$ in p auf der ganzen Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leqq \varrho_0^2$ definiert ist. Als Umgebung $\mathfrak{U}(p)$ kann man daher für jeden Punkt p eine Kugel K_{ϱ_0} mit dem festen Radius ϱ_0 und dem Mittelpunkt p wählen.

Weiter sei für S eine Flächenfunktion $f(p)$ gegeben. In der Umgebung von p ist sie als Funktion von x, y darstellbar. Ihr werden in p die Tangentialableitungen

$$\frac{\partial f(p)}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(p)}{\partial y}$$

zugeschrieben, falls diese existieren. Für die Ableitungen in einer beliebigen Tangentialrichtung t in p setzen wir entsprechend

$$\frac{\partial f(p)}{\partial t} = \frac{\partial f(p)}{\partial x} \cos(t, x) + \frac{\partial f(p)}{\partial y} \cos(t, y).$$

Hat nun die Flächenfunktion $f(p)$ in allen Punkten der Fläche Tangentialableitungen, so sagen wir, daß diese gleichmäßig in p einer H-Bedingung genügen, falls für irgendeinen Punkt q aus S_p

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f(q)}{\partial t_x} - \frac{\partial f(p)}{\partial x} \right| &\leqq C t^{\nu}, \\ \left| \frac{\partial f(q)}{\partial t_y} - \frac{\partial f(p)}{\partial y} \right| &\leqq C t^{\nu} \end{aligned} \qquad (0 < \nu < 1)$$

gilt, wobei C und ν von p unabhängig sind, und $\frac{\partial f(q)}{\partial t_x}$ bzw. $\frac{\partial f(q)}{\partial t_y}$ die Tangentialableitungen von f an der Stelle q in den Tangentialrichtungen darstellen, die sich durch Schnitt der Fläche S mit der x, z-Ebene bzw. der y, z-Ebene in q ergeben.

Besitzt die Flächenfunktion $f(p)$ in dem Sinne einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten ϱ $(0 < \varrho < 1)$ genügende partielle Ableitungen erster Ordnung, daß für alle Flächenpunkte

$$q = (x_q, y_q, \varphi(x_q, y_q))$$

mit

$$x_q^2 + y_q^2 \leqq \varrho_0^2$$

die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f(q)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(q)}{\partial y}$ existieren und einer Bedingung

$$\left|\frac{\partial f(q)}{\partial x} - \frac{\partial f(p)}{\partial x}\right| \leqq D t^{\varrho}, \quad \left|\frac{\partial f(q)}{\partial y} - \frac{\partial f(p)}{\partial y}\right| \leqq D t^{\varrho}$$

mit von p unabhängigen Zahlen D und ϱ genügen, so kann man zeigen, daß f Tangentialableitungen besitzt, die einer gleichmäßigen H-Bedingung mit einem Exponenten σ genügen, der gleich der kleineren der beiden Zahlen ϱ und λ ist, wenn λ wie bisher den „Flächenexponenten", d. h. die in (1) auftretende Konstante bedeutet. Bezeichnet man nämlich das lokale Koordinatensystem im Punkte q mit x', y', z', und wählt man es derart, daß die x', z'-Ebene mit der x, z-Ebene zusammenfällt, so ist

$$x = \cos(x, x')x' + \cos(x, z')z' + x_q,$$

und es wird

$$\frac{\partial f(q)}{\partial t_x} = \left[\frac{\partial f(\cos(x, x')x' + \cos(x, z')z' + x_q, 0)}{\partial x'}\right]_{x'=0,\ z'=0}$$
$$= \frac{\partial f(x_q, 0)}{\partial x}\cos(x, x') = \frac{\partial f(x_q, 0)}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi(x_q, 0)}{\partial x}\right)^2}}.$$

2. Bedeutet S die Berandung eines ebenen Gebietes R, so soll es auch hier zu jedem ihrer Punkte p eine Umgebung $\mathfrak{U}(p)$ derart geben, daß die darin enthaltene Teilmenge S_p von S in einem rechtwinklig-kartesischen Bezugssystem x, y, bei dem die x-Achse mit der Tangente von S in p identisch ist, sich eindeutig in der Form $y = \varphi(x)$ darstellen läßt. Die Ableitung $\varphi'(x)$ soll stetig sein und einer in p gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so daß für einen weiteren Punkt q aus S_p

$$|\varphi'(q) - \varphi'(p)| \leqq A t^{\lambda} \qquad (0 < \lambda < 1)$$

ist, wobei die Konstanten A und λ von p unabhängig sind.

Auch die übrigen im vorhergehenden Abschnitt eingeführten Definitionen besitzen im ebenen Fall ihr naheliegendes Gegenstück.

§ 2.

Zusammenstellung von geometrischen Hilfssätzen[16]).

1. *Ist P ein Punkt auf der Flächennormalen n_p in p und h seine z-Koordinate, so gelten, falls q ein beliebiger weiterer Punkt von S_p mit den Koordinaten x, y, z ist und man unter r_{qP} die Entfernung der Punkte q und P versteht, die folgenden Gleichungen und Ungleichungen:*

$$\frac{1}{r_{qP}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[\frac{1}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}}\right], \tag{2}$$

$$\cos(r_{qP}, n_p) = \cos(r_{qP}, z) = \frac{h-z}{r_{qP}} = \frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]^{17}), \tag{3}$$

$$\cos(r_{qP}, n_q) = \frac{h}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right], \tag{4}$$

$$\cos(r_{qP}, x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]^{17}), \tag{5}$$

$$\cos(r_{qP}, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} + O\left[(x^2+y^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]^{17}), \tag{6}$$

$$\left.\begin{matrix}|\cos(n_q, x)| \\ |\cos(n_q, y)|\end{matrix}\right\} \leqq A\, r_{qp}^{\lambda}, \tag{7}$$

$$\cos(n_q, z) = \cos(n_q, n_p) = 1 + O\left[(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]. \tag{8}$$

2. *Fällt P mit p zusammen, so erhalten wir statt dessen, unter K eine (von der Fläche abhängende) Konstante verstanden:*

$$|\cos(r_{qp}, n_q)| \leqq K A\, r_{qp}^{\lambda}, \tag{9}$$

$$|\cos(r_{qp}, n_p)| \leqq K A\, r_{qp}^{\lambda}, \tag{10}$$

$$\cos(r_{qp}, x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + O\left[(x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]^{17}), \tag{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \geqq \frac{1}{r_{qp}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + O\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1-\lambda}{2}}}\right]. \tag{12}$$

3. *Bezeichnet v eine beliebige Richtung im Raume, so gilt für drei beliebige Punkte P_1, P_2, P im Raume*

$$|\cos(r_{PP_1}, v) - \cos(r_{PP_2}, v)| \leqq \frac{2\, r_{P_1P_2}}{r_{PP_1}}. \tag{13}$$

[16]) Für die nicht ausgeführten Beweise verweisen wir auf J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]).

[17]) Bei SCHAUDER ist hier das entgegengesetzte Zeichen angegeben. Ist aber die positive z-Richtung mit der Richtung n_p identisch, und bedeutet h die z-Koordinate von P, so muß das bei uns angegebene Zeichen stehen.

4. *Es seien p_1 und p_2 zwei Punkte der Fläche, deren Entfernung kleiner als $\frac{\varrho_0}{2}$ ist. Um den Mittelpunkt der Strecke $\overline{p_1 p_2}$ beschreibe man eine Kugel mit dem Radius $r_{p_1 p_2}$; sie sei, wie auch entsprechend gebildete Kugeln, im folgenden Text mit $K_{p_1 p_2}$ bezeichnet. Für jeden außerhalb $K_{p_1 p_2}$ liegenden Flächenpunkt q bestehen dann die Abschätzungen*

$$|\cos(r_{q p_1}, n_q) - \cos(r_{q p_2}, n_q)| \leqq K A \frac{r_{p_1 p_2}}{r_{q p_1}^{1-\lambda}} \tag{14}$$

und

$$|\cos(r_{q p_1}, n_{p_1}) - \cos(r_{q p_2}, n_{p_2})| \leqq K A \left(\frac{r_{p_1 p_2}}{r_{q p_1}^{1-\lambda}} + r_{p_1 p_2}^{\lambda}\right). \tag{15}$$

5. *Für jeden Punkt P, der außerhalb von $K_{p_1 p_2}$ liegt, ist*

$$\frac{1}{4} < \frac{r_{P p_1}}{r_{P p_2}} < 4 \tag{16}$$

und

$$\left|\frac{1}{r_{P p_1}^2} - \frac{1}{r_{P p_2}^2}\right| \leqq K \frac{r_{p_1 p_2}}{r_{P p_1}^3}, \tag{17}$$

$$\left|\frac{1}{r_{P p_1}^3} - \frac{1}{r_{P p_2}^3}\right| \leqq K \frac{r_{p_1 p_2}}{r_{P p_1}^4}. \tag{18}$$

6. *Für die in einem Punkte q von S_p in § 1 definierte t_x-Richtung gilt bei Zugrundelegung eines beliebigen rechtwinklig-kartesischen Bezugssystems ξ, η, ζ:*

$$\left.\begin{aligned} &|\cos(\xi, x) - \cos(\xi, t_x)| \\ &|\cos(\eta, x) - \cos(\eta, t_x)| \\ &|\cos(\zeta, x) - \cos(\zeta, t_x)| \end{aligned}\right\} \leqq A t^{\lambda}; \tag{19}$$

entsprechende Abschätzungen bestehen für die t_y-Richtung. Ist nämlich $\mathfrak{x}$ ein Einheitsvektor in x-Richtung, $\mathfrak{t}_x$ ein Einheitsvektor in t_x-Richtung, so sind die links stehenden Größen kleiner oder gleich als

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{t}_x| = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)} < \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2} = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| \leqq A t^{\lambda},$$

wenn α den Winkel bezeichnet, den $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{t}_x$ miteinander bilden.

7. *Ist t_1 eine im Punkte p_1, t_2 eine im Punkte p_2 tangentiale Richtung, wobei für die Richtungskosinus gegen ein beliebiges rechtwinklig-kartesisches ξ, η, ζ-Koordinatensystem*

$$\left.\begin{aligned} &|\cos(\xi, t_1) - \cos(\xi, t_2)| \\ &|\cos(\eta, t_1) - \cos(\eta, t_2)| \\ &|\cos(\zeta, t_1) - \cos(\zeta, t_2)| \end{aligned}\right\} \leqq A r_{p_1 p_2}^{\lambda} \tag{20}$$

ilt, so bestehen die Ungleichungen

21) $$|\cos(n_q, t_1) - \cos(n_q, t_2)| \leqq 3 A r_{p_1 p_2}^{\lambda},$$

22) $$|\cos(r_{q p_1}, t_1) - \cos(r_{q p_2}, t_2)| \leqq \frac{6 r_{p_1 p_2}}{r_{q p_1}} + 3 A r_{p_1 p_2}^{\lambda}.$$

8. *Faßt man den Ausdruck* $\cos(r_{P_1 P}, \nu)$ *bei festem Punkt* P_1 *und fester Richtung* ν *als Funktion des Punktes* P *auf, so hat man für die Ableitung in einer beliebigen Richtung* t *im Raume*

23) $$\frac{\partial}{\partial t}\cos(r_{P_1 P}, \nu) = \{\cos(\nu, t) - \cos(r_{P_1 P}, t)\cos(r_{P_1 P}, \nu)\}\frac{1}{r_{P_1 P}}.$$

Setzt man nämlich

$$\overrightarrow{P_1 P} = \mathfrak{r}_{P_1 P},$$

und ist $\mathfrak{t}$ ein Einheitsvektor in t-Richtung ($|\mathfrak{t}| = 1$), so liegen die Endpunkte P der Vektoren $\overrightarrow{P_1 P}$, falls man P in t-Richtung variieren läßt, auf der Geraden

$$\mathfrak{r}_{P_1 P} = \mathfrak{r}_{P_1 P_0} + t\mathfrak{t}.$$

Daher wird

$$\frac{\partial \mathfrak{r}_{P_1 P}}{\partial t} = \mathfrak{t},$$

und es folgt, falls $\mathfrak{n}$ ein Einheitsvektor in ν-Richtung ist, ($|\mathfrak{n}| = 1$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\cos(r_{P_1 P}, \nu) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\mathfrak{r}_{P_1 P}}{|\mathfrak{r}_{P_1 P}|}\cdot\mathfrak{n}\right\} = \frac{1}{r_{P_1 P}}\mathfrak{t}\cdot\mathfrak{n} - \mathfrak{r}_{P_1 P}\cdot\mathfrak{n}\frac{\cos(r_{P_1 P}, t)}{r_{P_2 P}^2}$$
$$= \{\cos(\nu, t) - \cos(r_{P_1 P}, \nu)\cos(r_{P_1 P}, t)\}\frac{1}{r_{P_1 P}}.$$

§ 3.

Hilfssätze über Integrale, die die biharmonischen Analoga des Potentials einer Doppelbelegung darstellen.

1. *Unter* ξ, η, ζ *verstehen wir, wie eben, die Koordinaten in bezug auf ein beliebiges rechtwinklig-kartesisches Bezugssystem. Die geschlossene Fläche* S *genüge den in* § 1 *genannten Voraussetzungen. Alsdann gilt*

24) $$\iint_{(S)} \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} d\sigma = \iint_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} d\sigma = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem P *im Innengebiet von* S, *auf* S *oder im Außengebiet von* S *liegt. Weiter ist bei beliebiger Lage des Punktes* P:

25) $$\iint_{(S)} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} d\sigma = \iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, \eta)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} d\sigma = 0.$$

Hierbei bedeuten $P = (\xi, \eta, \zeta)$ den „Aufpunkt“, $p' = (\xi_{p'}, \eta_{p'}, \zeta_{p'})$ den Integrationspunkt; $n_{p'}$ bezeichnet die innere Normale, und es ist

$$\frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} = \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi_{p'}} \cos(\xi, n_{p'}) + \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta_{p'}} \cos(\eta, n_{p'}) + \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \zeta_{p'}} \cos(\zeta, n_{p'})$$

gesetzt.

Dem Beweis von (24) und (25) legen wir folgenden Hilfssatz[18]) zugrunde: *Sind die Funktionentripel u, v, w und $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ im Bereich $R + S$ zweimal*[19]) *stetig differenzierbar, und genügen sie dort den Differentialgleichungen*

$$\Delta u + k \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v + k \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w + k \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = 0 \tag{26}$$

mit

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta},$$

wobei k ein Parameter ist, so besteht unter Benutzung der Bezeichnungen

$$\left\{\begin{aligned}
X_{u,v,w}(P,p) = {} & \left\{\frac{\partial u(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\xi) + \frac{\partial u(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\eta) + \frac{\partial u(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\zeta)\right\} \\
& + k\left\{\frac{\partial u(P)}{\partial \xi} + \frac{\partial v(P)}{\partial \eta} + \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\right\}\cos(n_p,\xi) + \\
& + \frac{k}{2+k}\left\{\frac{\partial v(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\eta) + \frac{\partial w(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\zeta) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial v(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\xi) - \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\xi)\right\}, \\
Y_{u,v,w}(P,p) = {} & \left\{\frac{\partial v(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\xi) + \frac{\partial v(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\eta) + \frac{\partial v(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\zeta)\right\} \\
& + k\left\{\frac{\partial u(P)}{\partial \xi} + \frac{\partial v(P)}{\partial \eta} + \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\right\}\cos(n_p,\eta) + \\
& + \frac{k}{2+k}\left\{\frac{\partial w(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\zeta) + \frac{\partial u(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\xi) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\eta) - \frac{\partial u(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\eta)\right\}, \\
Z_{u,v,w}(P,p) = {} & \left\{\frac{\partial w(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\xi) + \frac{\partial w(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\eta) + \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\zeta)\right\} \\
& + k\left\{\frac{\partial u(P)}{\partial \xi} + \frac{\partial v(P)}{\partial \eta} + \frac{\partial w(P)}{\partial \zeta}\right\}\cos(n_p,\zeta) + \\
& + \frac{k}{2+k}\left\{\frac{\partial u(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\xi) + \frac{\partial v(P)}{\partial \zeta}\cos(n_p,\eta) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial u(P)}{\partial \xi}\cos(n_p,\zeta) - \frac{\partial v(P)}{\partial \eta}\cos(n_p,\zeta)\right\}
\end{aligned}\right. \tag{27}$$

[18]) Vgl. zu diesem Hilfssatz G. Lauricella, Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica-matematica. Il Nuovo Cimento, serie 5ª, XIII, S. 104—118, 155—174, 237—262, 501—518, insbes. S. 109.

[19]) Es würde auch genügen, vorauszusetzen, daß die zweiten Ableitungen in R und die ersten in $R + S$ stetig sind.

die Integralformel

$$(28)\quad \iint_{(S)} \{[u]_S X_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') + [v]_S Y_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') + [w]_S Z_{u,v,\bar w}(p',p') - \\ - [\bar u]_S X_{u,v,w}(p',p') - [\bar v]_S Y_{u,v,w}(p',p') - [\bar w]_S Z_{u,v,w}(p',p')\}\, d\sigma = 0.$$

Die Relation (28) folgt unmittelbar bei Benutzung des Gaussschen Integralsatzes und einer Greenschen Formel aus

$$0 = \iiint_{(R)} \Big\{u\Big[\Delta\bar u + k\frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\xi} + \frac{k}{2+k}\Big(\frac{\partial^2\bar v}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial^2\bar w}{\partial\xi\,\partial\zeta} - \frac{\partial^2\bar v}{\partial\eta\,\partial\xi} - \frac{\partial^2\bar w}{\partial\zeta\,\partial\xi}\Big)\Big] + \\ + v\Big[\Delta\bar v + k\frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\eta} + \frac{k}{2+k}\Big(\frac{\partial^2\bar w}{\partial\eta\,\partial\zeta} + \frac{\partial^2\bar u}{\partial\eta\,\partial\xi} - \frac{\partial^2\bar w}{\partial\zeta\,\partial\eta} - \frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi\,\partial\eta}\Big)\Big] + \\ + w\Big[\Delta\bar w + k\frac{\partial\bar\vartheta}{\partial\zeta} + \frac{k}{2+k}\Big(\frac{\partial^2\bar u}{\partial\zeta\,\partial\xi} + \frac{\partial^2\bar v}{\partial\zeta\,\partial\eta} - \frac{\partial^2\bar u}{\partial\xi\,\partial\zeta} - \frac{\partial^2\bar v}{\partial\eta\,\partial\zeta}\Big)\Big]\Big\}\, d\tau$$

$$= -\iiint_{(R)} \Big\{\Big[\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\bar u}{\partial\eta} + \frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial u}{\partial\zeta} + \frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial\bar v}{\partial\eta} + \frac{\partial v}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar v}{\partial\zeta} \\ + \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\bar w}{\partial\xi} + \frac{\partial w}{\partial\eta}\frac{\partial\bar w}{\partial\eta} + \frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar w}{\partial\zeta}\Big] + k\vartheta\bar\vartheta + \\ + \frac{k}{2+k}\Big[\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\bar v}{\partial\xi} + \frac{\partial\bar u}{\partial\eta}\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar w}{\partial\eta} + \frac{\partial\bar v}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\eta} + \frac{\partial w}{\partial\xi}\frac{\partial\bar u}{\partial\zeta} + \frac{\partial\bar w}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\zeta} - \\ - \frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\bar v}{\partial\eta} - \frac{\partial\bar u}{\partial\xi}\frac{\partial v}{\partial\eta} - \frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial\bar w}{\partial\zeta} - \frac{\partial\bar v}{\partial\eta}\frac{\partial w}{\partial\zeta} - \frac{\partial w}{\partial\zeta}\frac{\partial\bar u}{\partial\xi} - \frac{\partial\bar w}{\partial\zeta}\frac{\partial u}{\partial\xi}\Big]\Big\}\, d\tau - \\ - \iint_{(S)} \{[u]_S X_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') + [v]_S Y_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p') + [w]_S Z_{\bar u,\bar v,\bar w}(p',p')\}\, d\sigma$$

und einer entsprechenden Beziehung, die sich durch Vertauschung der Tripel u, v, w und $\bar u, \bar v, \bar w$ ergibt.

Ist nunmehr P_1 ein beliebiger in R gelegener Punkt, so sind die neun durch

$$(29)\quad \begin{cases} u_1(P,P_1) = \dfrac{1}{r_{P_1P}} - \dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\xi^2}, \quad v_1(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\xi\,\partial\eta}, \\ \qquad\qquad w_1(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\xi\,\partial\zeta}, \\ u_2(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\eta\,\partial\xi}, \quad v_2(P,P_1) = \dfrac{1}{r_{P_1P}} - \dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\eta^2}, \\ \qquad\qquad w_2(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\eta\,\partial\zeta}, \\ u_3(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\zeta\,\partial\xi}, \quad v_3(P,P_1) = -\dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\zeta\,\partial\eta}, \\ \qquad\qquad w_3(P,P_1) = \dfrac{1}{r_{P_1P}} - \dfrac{k}{2(1+k)}\dfrac{\partial^2 r_{P_1P}}{\partial\zeta^2} \end{cases}$$

gegebenen Funktionen in $R+S$ mit Ausnahme des Punktes P_1 beliebig oft differenzierbar und genügen den Gleichungen (26). Wählt man alsdann die drei Funktionentripel (29) der Reihe nach für $u, \bar v, \bar w$, und umgibt man den

Punkt P_1 mit einer ganz in R gelegenen Kugel S_0, so folgt aus der zu (28) analogen Formel, bei der neben dem Flächenintegral über S noch ein Flächenintegral über S_0 auftritt mit aus der Potentialtheorie geläufiger Schlußweise, wenn man den Radius von S_0 gegen Null gehen läßt, daß

$$
(30)\quad \left\{\begin{aligned}
u(P_1) &= \frac{1}{4\pi}\iint_{(S)} \{[u]_S X_{u_1,v_1,w_1}(p',p';P_1) + [v]_S Y_{u_1,v_1,w_1}(p',p';P_1) + \\
&\qquad + [w]_S Z_{u_1,v_1,w_1}(p',p';P_1) - \\
&\quad - [u_1]_S X_{u,v,w}(p',p') - [v_1]_S Y_{u,v,w}(p',p') - \\
&\qquad - [w_1]_S Z_{u,v,w}(p',p')\}\, d\sigma, \\
v(P_1) &= \frac{1}{4\pi}\iint_{(S)} \{[u]_S X_{u_2,v_2,w_2}(p',p';P_1) + [v]_S Y_{u_2,v_2,w_2}(p',p';P_1) + \\
&\qquad + [w]_S Z_{u_2,v_2,w_2}(p',p';P_1) - \\
&\quad - [u_2]_S X_{u,v,w}(p',p') - [v_2]_S Y_{u,v,w}(p',p') - \\
&\qquad - [w_2]_S Z_{u,v,w}(p',p')\}\, d\sigma, \\
w(P_1) &= \frac{1}{4\pi}\iint_{(S)} \{[u]_S X_{u_3,v_3,w_3}(p',p';P_1) + [v]_S Y_{u_3,v_3,w_3}(p',p';P_1) + \\
&\qquad + [w]_S Z_{u_3,v_3,w_3}(p',p';P_1) - \\
&\quad - [u_3]_S X_{u,v,w}(p',p') - [v_3]_S Y_{u,v,w}(p',p') - \\
&\qquad - [w_3]_S Z_{u,v,w}(p',p')\}\, d\sigma
\end{aligned}\right.
$$

sein muß. Hierbei ist gemäß (27) und (29)

$$
\begin{aligned}
X_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1) &= \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}, \\
Y_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1) &= \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}, \\
Z_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1) &= \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}, \\
X_{u_2,v_2,w_2}(p,p;P_1) &= Y_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1), \\
Y_{u_2,v_2,w_2}(p,p;P_1) &= \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \eta}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}, \\
Z_{u_2,v_2,w_2}(p,p;P_1) &= \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}, \\
X_{u_3,v_3,w_3}(p,p;P_1) &= Z_{u_1,v_1,w_1}(p,p;P_1), \\
Y_{u_3,v_3,w_3}(p,p;P_1) &= Z_{u_2,v_2,w_2}(p,p;P_1), \\
Z_{u_3,v_3,w_3}(p,p;P_1) &= \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP_1}}{\partial \zeta}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP_1}}\right)}{\partial n_p}
\end{aligned}
$$

zu setzen.

Analoge Betrachtungen kann man für das Außengebiet R_a von R anstellen, wenn vorausgesetzt wird, daß die Funktionen u, v, w in $R_a + S$ zweimal stetig differenzierbar sind und dort den Gleichungen (26) genügen, daß sie ferner, falls der Aufpunkt P sich unbegrenzt weit vom Ursprung O des Koordinatensystems entfernt, wohlbestimmten Grenzwerten u_0, v_0, w_0 zustreben, während ihre ersten partiellen Ableitungen dabei wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden. Es ergeben sich für $u(P_1), v(P_1), w(P_1)$ mit P_1 in R_a Ausdrücke von der Form (30), mit dem einzigen Unterschied, daß auf der rechten Seite bzw. die Bestandteile u_0, v_0, w_0 additiv hinzutreten.

Liegt schließlich der Punkt P_1 auf der Berandung S von R, so umgebe man ihn ebenfalls mit einer Kugel S_0 und wende (28), falls $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ bzw. gleich einem der Tripel (29) ist, auf die Oberfläche des Teilgebietes von R an, das aus R durch Wegnahme der Durchschnittsmenge von R und dem abgeschlossenen Kugelkörper von S_0 entsteht. Läßt man den Radius von S_0 gegen Null gehen, so erhält man eine zu (30) analoge Formel, die sich von dieser nur dadurch unterscheidet, daß der vor den Integralen über S stehende Faktor $\frac{1}{4\pi}$ durch $\frac{1}{2\pi}$ zu ersetzen ist.

Wählt man aber in (30) und in den im Text erwähnten entsprechenden Formeln, die sich ergeben, wenn P_1 auf S oder in R_a liegt, speziell

$$u(P) \equiv 1, \quad v(P) \equiv 0, \quad w(P) \equiv 0,$$

und beachtet man, daß als Folgerung aus dem Greenschen Satz der Potentialtheorie

$$\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2}\, d\sigma = \begin{cases} 4\pi \\ 2\pi \\ 0 \end{cases}$$

ist, je nachdem P in R, auf S oder in R_a liegt, so resultieren unmittelbar die behaupteten Relationen (24) und (25).

2. *Ist auf S eine integrable und beschränkte Funktion $f(p)$ gegeben, so genügen die Integrale*

$$V(p) = \iint\limits_{(S)} f(p') \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2}\, d\sigma$$

und

$$W(p) = \iint\limits_{(S)} f(p') \frac{\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, \eta)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2}\, d\sigma$$

auf S gleichmäßig einer H-Bedingung mit dem Flächenexponenten λ.

Dazu zeigen wir, daß für irgendeinen Flächenpunkt q *mit* $r_{pq} < \frac{\varrho_0}{2}$:

$$\left.\begin{matrix} |V(q) - V(p)| \\ |W(q) - W(p)| \end{matrix}\right\} \leqq KA\,\overline{\text{fin}}\,|f|\,r_{pq}^{\lambda}$$

gilt. Beachtet man nämlich, daß $r_{pq} \leqq Kt$ ist, so folgt daraus unmittelbar die Behauptung. Wir führen hier, wie auch bei den folgenden Hilfssätzen den Beweis nur für das Integral $V(p)$, da er für $W(p)$ ganz analog verläuft.

Um p und q beschreibe man die im § 2, Abschnitt 4 näher gekennzeichnete Kugel K_{pq}. Der Durchschnitt von S und K_{pq} heiße s; weiter sei $S - s = S'$. Damit wird

$$V(q) - V(p) = \iint\limits_{(s)} f(p') \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2}\,d\sigma -$$

$$- \iint\limits_{(s)} f(p') \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2}\,d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{(S-s)} f(p') \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \right\} d\sigma.$$

Die beiden ersten Integrale lassen sich ihrem absoluten Betrage nach durch die bereits von SCHAUDER[20]) abgeschätzten Integrale

$$\iint\limits_{(s)} |f(p')| \frac{|\cos(r_{p'q}, n_{p'})|}{r_{p'q}^2}\,d\sigma \leqq KA\,\overline{\text{fin}}\,|f|\,r_{pq}^{\lambda}$$

und

$$\iint\limits_{(s)} |f(p')| \frac{|\cos(r_{p'p}, n_{p'})|}{r_{p'p}^2}\,d\sigma \leqq KA\,\overline{\text{fin}}\,|f|\,r_{pq}^{\lambda}$$

majorisieren.

Beschreibt man um den Punkt p die feste, d. h. von q unabhängige Kugel K_{ϱ_0}, so enthält sie die Kugel K_{pq} in ihrem Inneren. Der in K_{ϱ_0} gelegene Teil von $S - s$ heiße S''. Zerlegt man nun das Integral $\iint\limits_{(S-s)}$ in $\iint\limits_{(S'')}$ und $\iint\limits_{(S-s-S'')}$, so liefert das letztere sicher die für die H-Bedingung erforderliche Abschätzung. Für das restliche Integral kann geschrieben werden:

$$\iint\limits_{(S'')} f(p') \frac{\{\cos^2(r_{p'q}, \xi) - \cos^2(r_{p'p}, \xi)\}\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2}\,d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{(S'')} f(p')\cos^2(r_{p'p}, \xi) \left\{ \frac{\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \right\} d\sigma.$$

[20]) J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 613.

Das zweite Integral kann durch das von SCHAUDER[21]) abgeschätzte Integral

$$\iint\limits_{(S'')} |f(p')| \left| \frac{\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \right| d\sigma \leqq K A \overline{\text{fin}}\,|f|\, r_{pq}^{\lambda}$$

majorisiert werden.

Das erste Integral ist aber schließlich bei Beachtung von (9), (13) und (16) kleiner oder gleich als

$$4 \iint\limits_{(S'')} |f(p')| \left| \frac{r_{pq}}{r_{p'q}^3} \right| \cos(r_{p'q}, n_{p'}) | \, d\sigma$$

$$\leqq 4\,\overline{\text{fin}}\,|f|\, r_{pq} K A \iint\limits_{(S'')} \frac{r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^3} d\sigma \leqq K A \overline{\text{fin}}\,|f|\, r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-\lambda}}$$

$$\leqq K A \overline{\text{fin}}\,|f|\, r_{pq}^{\lambda},$$

wenn man berücksichtigt, daß zunächst

$$\iint\limits_{(S'')} \frac{1}{r_{p'p}^{3-\lambda}} d\sigma \leqq K \int\limits_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-\lambda}}$$

ist, falls ϱ_1 den Abstand des Punktes p vom Rande der Projektion von S'' auf die Tangentialebene in p bedeutet, und daß nach (12)

$$\varrho_1 = \tfrac{1}{2} r_{pq} (1 + O[r_{pq}^{\lambda}])$$

gilt.

3. *Genügt $f(p)$ auf S einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten μ, d. h. gilt*

$$|f(q) - f(p)| \leqq B t^{\mu} \qquad (0 < \mu < 1;\ q \text{ in } S_p),$$

so hat man für $V(p)$ und $W(p)$ eine der drei Abschätzungen

$$\left.\begin{matrix} |V(q) - V(p)| \\ |W(q) - W(p)| \end{matrix}\right\} \leqq \begin{cases} K A B t^{\lambda+\mu} \\ K A B t \\ K A B t\,|\log t| \end{cases},$$

je nachdem

$$\mu + \lambda < 1, \quad \mu + \lambda > 1, \quad \mu + \lambda = 1$$

ist.

Da wegen (24)

$$\iint\limits_{(S)} f(p) \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} d\sigma$$

$$= \iint\limits_{(S)} f(p) \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi) \cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} d\sigma = \frac{2\pi}{3} f(p)$$

[21]) J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 613.

sein muß, so kann man

$$V(q) - V(p) = \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi) \cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \right\} d\sigma$$

schreiben.

Zur Abschätzung dieser Differenz verwende man die bereits im Abschnitt 2 dieses Paragraphen benutzten Flächenstücke s, S, $S - s$, S''. Für $\iint\limits_{(s)}$ findet man unter Anwendung einer Abschätzung von SCHAUDER[22])

$$(31) \quad \left| \iint\limits_{(s)} \right| \leqq \iint\limits_{(s)} |f(p') - f(p)| \frac{|\cos(r_{p'q}, n_{p'})|}{r_{p'q}^2} d\sigma +$$
$$+ \iint\limits_{(s)} |f(p') - f(p)| \frac{|\cos(r_{p'p}, n_{p'})|}{r_{p'p}^2} d\sigma \leqq KAB r_{pq}^{\mu+\lambda} \leqq KAB t^{\mu+\lambda}.$$

Wegen (9), (13) und (16) und einer weiteren Abschätzung von SCHAUDER[23]) ist weiter

$$\left| \iint\limits_{(S'')} \right| \leqq \iint\limits_{(S')} |f(p') - f(p)| \frac{|\cos^2(r_{p'q}, \xi) - \cos^2(r_{p'p}, \xi)| \cdot |\cos(r_{p'q}, n_{p'})|}{r_{p'q}^2} d\sigma +$$
$$+ \iint\limits_{(S'')} |f(p') - f(p)| \frac{|\cos^2(r_{p'p}, \xi)| \cdot |\cos(r_{p'q}, n_{p'}) - \cos(r_{p'p}, n_{p'})|}{r_{p'q}^2} d\sigma +$$
$$+ \iint\limits_{(S'')} |f(p') - f(p)| \cdot |\cos^2(r_{p'p}, \xi)| \cdot |\cos(r_{p'p}, n_{p'})| \cdot \left| \frac{1}{r_{p'q}^2} - \frac{1}{r_{p'p}^2} \right| d\sigma$$
$$\leqq 4KAB \iint\limits_{(S'')} r_{p'p}^{\mu} \frac{r_{pq}}{r_{p'q}^3} r_{p'q}^{\lambda} d\sigma + KAB r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2}r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}}$$
$$\leqq KAB r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2}r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}}.$$

Aus den gewonnenen Abschätzungen gewinnt man aber genau wie bei SCHAUDER die Behauptung.

N. B. Für $\lambda + \mu > 1$ folgt insbesondere aus der letzten Abschätzung

$$\left| \iint\limits_{(S'')} \right| \leqq KAB r_{pq} \varrho_0^{\lambda+\mu-1}.$$

Daraus kann man bei Beachtung von (31) eine für spätere Zwecke nützliche Bemerkung ablesen. Ist σ ein Flächenstück, das ganz in einer Kugel vom

---

[22]) J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 614.

[23]) J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 614.

Radius $\varepsilon < \frac{\varrho_0}{2}$ um p enthalten ist, und gilt $r_{pq} < \varepsilon$, so folgt im Falle $\lambda + \mu > 1$ für das über σ erstreckte Integral

$$\left| \iint\limits_{(\sigma)} \{f(p') - f(p)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})}{r_{p'q}^2} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} \right\} d\sigma \right|$$
$$\leqq K A B \varepsilon^{\lambda+\mu-1} r_{pq}.$$

Man braucht ja in der eben angegebenen Abschätzung ϱ_0 nur durch ε zu ersetzen und in (31) $r_{pq} < \varepsilon$ zu berücksichtigen.

4. *Ist $\lambda + \mu > 1$, so existieren auf der Fläche die Tangentialableitungen $\frac{\partial V(p)}{\partial t}$ und $\frac{\partial W(p)}{\partial t}$ und sind durch*

$$\frac{\partial V(p)}{\partial t} = \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, t) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, t) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, t)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma$$

bzw.

$$\frac{\partial W(p)}{\partial t} = \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, \eta)\cos(n_{p'}, t) +$$
$$+ \cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\eta, t) +$$
$$+ \cos(r_{p'p}, \eta)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, t) -$$
$$- 5\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, \eta)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, t)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma$$

gegeben.

Beweis. Sei t eine an die Fläche im Punkte p tangentiale Richtung. Um p beschreibe man eine Kugel K_ε vom Radius ε mit $\varepsilon < \frac{\varrho_0}{2}$. Der Durchschnitt von S und K_ε heiße σ. Da nach (24)

$$\frac{\partial V(p)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} d\sigma$$

ist, so folgt bei Beachtung von (23), falls man das rechts stehende Integral $\iint\limits_{(S)}$ in $\iint\limits_{(\sigma)} + \iint\limits_{(S-\sigma)}$ zerlegt,

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{(S-\sigma)} = \iint\limits_{(S-\sigma)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, t) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, t) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, t)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma.$$

Da nun aber weiter

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{(\sigma)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\iint\limits_{(\sigma)}\{f(p')-f(p)\}\left\{\frac{\cos^2(r_{p'q},\,\xi)\cos(r_{p'q},\,n_{p'})}{r^2_{p'q}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos^2(r_{p'p},\,\xi)\cos(r_{p'p},\,n_{p'})}{r^2_{p'p}}\right\} d\sigma$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{r_{pq}}\iint\limits_{(\sigma)}$$

gilt, falls q ein Punkt von S_p ist, der in t-Richtung liegt, und t wie bisher die Projektion von $\overline{qp}$ auf die Tangentialebene in p darstellt, so ergibt sich bei Beachtung der Nebenbemerkung im Abschnitt 3 dieses Paragraphen, daß

$$\left|\frac{1}{r_{pq}}\iint\limits_{(\sigma)}\right| \leqq K\,A\,B\,\varepsilon^{\lambda+\mu-1}$$

ist und also wegen $\lambda+\mu>1$ mit ε gegen Null geht.

5. *Ist* $0<\lambda<1$, $0<\mu<1$, $\mu+\lambda>1$, *so genügen die Tangentialableitungen* $\frac{\partial V(p)}{\partial t}$ *und* $\frac{\partial W(p)}{\partial t}$ *einer H-Bedingung mit dem Exponenten* $\lambda+\mu-1$.

Es handelt sich also darum zu zeigen, daß für alle q aus S_p

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial V(q)}{\partial t_x}-\dfrac{\partial V(p)}{\partial x}\right|\\ \left|\dfrac{\partial V(q)}{\partial t_y}-\dfrac{\partial V(p)}{\partial y}\right|\end{array}\right\} \leqq C t^{\mu+\lambda-1}$$

gilt (vgl. § 1). Wir brauchen nur eine der beiden Relationen zu beweisen.

Bezeichnet man das in der Kugel $K_{pq}\left(r_{pq}<\frac{\varrho_0}{2}\right)$ gelegene Flächenstück mit s und schreibt man die links stehende Differenz der beiden Ableitungen unter Benutzung der im vorhergehenden Hilfssatz angegebenen Integraldarstellung als Differenz zweier Integrale, so findet man für die Integralanteile über s die Abschätzung

$$\left|\iint\limits_{(s)}\right| \leqq \iint\limits_{(s)}|f(p')-f(q)|\,|\cos^2(r_{p'q},\,\xi)\cos(n_{p'},\,t_x)+$$
$$+2\cos(r_{p'q},\,\xi)\cos(r_{p'q},\,n_{p'})\cos(\xi,\,t_x)-$$
$$-5\cos^2(r_{p'q},\,\xi)\cos(r_{p'q},\,n_{p'})\cos(r_{p'q},\,t_x)|\,\frac{1}{r^3_{p'q}}\,d\sigma+$$
$$+\iint\limits_{(s)}|f(p')-f(p)|\,|\cos^2(r_{p'p},\,\xi)\cos(n_{p'},\,x)+$$
$$+2\cos(r_{p'p},\,\xi)\cos(r_{p'p},\,n_{p'})\cos(\xi,\,x)-$$
$$-5\cos^2(r_{p'p},\,\xi)\cos(r_{p'p},\,n_{p'})\cos(r_{p'p},\,x)|\,\frac{1}{r^3_{p'p}}\,d\sigma$$

oder falls man (7), (9), (10) und

$$|\cos(r_{p'q}, \xi)| \leqq 1, \quad |\cos(\xi, t_x)| \leqq 1, \quad |\cos(r_{p'q}, t_x)| \leqq 1;$$
$$|\cos(r_{p'p}, \xi)| \leqq 1, \quad |\cos(\xi, x)| \leqq 1, \quad |\cos(r_{p'p}, x)| \leqq 1$$

benutzt

$$\left|\iint_{(s)}\right| \leqq KAB\left\{\iint_{(s)} r_{p'q}^{\mu}\,\frac{r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^{3}}\,d\sigma + \iint_{(s)} r_{p'p}^{\mu}\,\frac{r_{p'p}^{\lambda}}{r_{p'p}^{3}}\,d\sigma\right\},$$

d. h.

$$\left|\iint_{(s)}\right| \leqq KAB\int_{0}^{2r_{pq}} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}} = KAB\,r_{pq}^{\mu+\lambda-1}. \tag{32}$$

N. B. Diese Abschätzung besteht auch für $\mu = 1$.

Es sind also nur noch die Anteile der Integrale über S'' zu untersuchen. Zunächst ist

$$\begin{aligned}
\iint_{(S'')} &= \{f(p) - f(q)\}\iint_{(S'')}\{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x) + \\
&\quad + 2\cos(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(\xi, t_x) - \\
&\quad - 5\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(r_{p'q}, t_x)\}\,\frac{1}{r_{p'q}^{3}}\,d\sigma + \\
&+ \iint_{(S'')}\{f(p') - f(p)\}\Big[\{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x) + \\
&\quad + 2\cos(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(\xi, t_x) - \\
&\quad - 5\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(r_{p'q}, t_x)\}\,\frac{1}{r_{p'q}^{3}} - \\
&- \{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x) + 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, x) - \\
&\quad - 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, x)\}\,\frac{1}{r_{p'p}^{3}}\Big]\,d\sigma \\
&= \mathrm{I} + \mathrm{II}.
\end{aligned}$$

Das Integral I läßt sich nach (7) und (9) folgendermaßen abschätzen

$$|\mathrm{I}| \leqq B\,r_{pq}^{\mu}\,KA\iint_{(S'')}\frac{r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^{3}}\,d\sigma \leqq KAB\,r_{pq}^{\mu}\int_{\frac{1}{2}r_{pq}}^{\varrho_0}\frac{d\varrho}{\varrho^{2-\lambda}},$$

d. h.

$$|\mathrm{I}| \leqq KAB r_{pq}^{\mu} r_{pq}^{\lambda-1} = KAB r_{pq}^{\mu+\lambda-1}. \tag{33}$$

N. B. Diese Abschätzung gilt auch für $\mu = 1$.

Das Integral II werde weiter zerlegt in

$$\mathrm{II} = \iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r^3_{p'q}} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'p}} \right\} d\sigma +$$

$$+ 2 \iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \left\{ \frac{\cos(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(\xi, t_x)}{r^3_{p'q}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, x)}{r^3_{p'p}} \right\} d\sigma -$$

$$- 5 \iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(r_{p'q}, t_x)}{r^3_{p'q}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, x)}{r^3_{p'p}} \right\} d\sigma$$

$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

Da

$$J_1 = \iint\limits_{(S'')} \{f(p') - f(p)\} \left[\left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r^3_{p'q}} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r^3_{p'q}} \right\} + \right.$$

$$+ \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x)}{r^3_{p'q}} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'q}} \right\} +$$

$$\left. + \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'q}} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r^3_{p'p}} \right\} \right] d\sigma,$$

so hat man bei Beachtung von (13), (7), (21), (18) und (16)

$$|J_1| \leqq KAB \iint\limits_{(S'')} \left\{ \frac{r^{\mu}_{p'p} r_{pq} r^{\lambda}_{p'q}}{r^4_{p'q}} + \frac{r^{\mu}_{p'p} r^{\lambda}_{pq}}{r^3_{p'q}} + \frac{r^{\mu}_{p'p} r^{\lambda}_{p'p} r_{pq}}{r^4_{p'q}} \right\} d\sigma$$

$$\leqq KAB r^{\lambda}_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-\mu}} + KAB r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(\lambda+\mu)}}.$$

Für $\lambda + \mu > 1$ und $\mu < 1$ ergibt sich daher

$$|J_1| \leqq KAB r^{\lambda+\mu-1}_{pq}.$$

Genau so erkennt man nach (13), (9), (14), (19) und (18), daß

$$|J_2| \leqq KAB \iint\limits_{(S'')} \left\{ \frac{r^{\mu}_{p'p} r_{pq} r^{\lambda}_{p'q}}{r^4_{p'q}} + \frac{r^{\mu}_{p'p} r_{pq}}{r^3_{p'q} r^{1-\lambda}_{p'q}} + \frac{r^{\mu}_{p'p} r^{\lambda}_{p'p} r^{\lambda}_{pq}}{r^3_{p'q}} + \frac{r^{\mu}_{p'p} r^{\lambda}_{p'p} r_{pq}}{r^4_{p'q}} \right\} d\sigma$$

$$\leqq KAB r_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(\lambda+\mu)}} + KAB r^{\lambda}_{pq} \int\limits_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}}$$

$$\leqq KAB r^{\lambda+\mu-1}_{pq} + KAB r^{\lambda}_{pq} r^{\lambda+\mu-1}_{pq} \leqq KAB r^{\mu+\lambda-1}_{pq},$$

d. h.

$$|J_2| \leqq K A B r_{pq}^{\mu+\lambda-1} \tag{34}$$

ist, und gemäß (13), (10), (14), (9), (22) und (18) wird schließlich

$$|J_3| \leqq K A B \iint_{(S'')} \left\{ \frac{r_{p'p}^{\mu} r_{pq} r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^{4}} + \frac{r_{p'p}^{\mu} r_{pq} r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^{4}} + \right.$$

$$\left. + \frac{r_{p'p}^{\mu} r_{p'p}^{\lambda}}{r_{p'q}^{3}} \left(\frac{r_{pq}}{r_{p'q}} + r_{pq}^{\lambda} \right) + \frac{r_{p'p}^{\mu} r_{p'p}^{\lambda} r_{pq}}{r_{p'q}^{4}} \right\} d\sigma$$

$$\leqq K A B r_{pq} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(\lambda+\mu)}} + K A B r_{pq}^{\lambda} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(\lambda+\mu)}},$$

d. h.

$$|J_3| \leqq K A B r_{pq}^{\mu+\lambda-1}. \tag{35}$$

6. *Besitzt die Funktion $f(p)$ auf S tangentiale Ableitungen, die gleichmäßig einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\varepsilon > 0$ genügen*:

$$\left.\begin{aligned} &\left| \frac{\partial f(q)}{\partial t_x} - \frac{\partial f(p)}{\partial x} \right| \\ &\left| \frac{\partial f(q)}{\partial t_y} - \frac{\partial f(p)}{\partial y} \right| \end{aligned}\right\} \leqq C t^{\varepsilon} \quad \left(q \text{ in } S_p;\ \operatorname{Max} \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right| \leqq C \right),$$

so genügen die Tangentialableitungen $\frac{\partial V(p)}{\partial t}$ und $\frac{\partial W(p)}{\partial t}$ gleichmäßig einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ.

Beweis. Wegen der Existenz der Tangentialableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in jedem Punkte p muß

$$\frac{|f(q) - f(p)|}{t} \leqq K C$$

sein, so daß $f(p)$ gleichmäßig einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu = 1$ genügt.

Schreibt man nun, wie bei dem vorstehenden Hilfssatz

$$\frac{\partial V(q)}{\partial t_x} - \frac{\partial V(p)}{\partial x}$$

als Integral über S, so folgt nach den auch bei $\mu = 1$ geltenden Abschätzungen (32) und (33)

$$\left| \iint_{(s)} \right| \leqq K A C r_{pq}^{\lambda}, \quad |\mathrm{I}| \leqq K A C r_{pq}^{\lambda}.$$

Bei Benutzung des im Punkte p lokalen Koordinatensystems wird nun

$$f(p') - f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x' + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y' + \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\right\} x' + \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^* - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\right\} y'.$$

Führt man die in der zum Punkte p^* gehörigen t_x-Richtung variierende lokale Tangentialkoordinate

$$t_x = (x - x^*)\cos\alpha + \{\varphi(x, 0) - \varphi(x^*, 0)\}\sin\alpha$$

ein, wo α der Winkel zwischen der x-Achse und der t_x-Richtung ist, so gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* &= \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)_{t_x=0}\left(\frac{dt_x}{dx}\right)_{x=x^*} = \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)^*\left(\frac{dt_x}{dx}\right)^* \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)^*\left\{\cos\alpha + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^*\sin\alpha\right\} = \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)^*\frac{1}{\cos\alpha} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t_x}\right)^*\sqrt{1 + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^*\right]^2}.\end{aligned}$$

Damit erhält man ohne weiteres bei Beachtung von (1) und der Voraussetzung dieses Hilfssatzes[24])

$$f(p') - f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x' + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y' + O\left[t'^{1+\varepsilon} + t'^{1+\lambda}\right]. \tag{36}$$

Für das Integral II kann dann geschrieben werden

$$\begin{aligned}\mathrm{II} = a_0 \iint_{(S'')} x' \Big[&\{\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(n_{p'}, t_x) + 2\cos(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(\xi, t_x) - \\ &- 5\cos^2(r_{p'q}, \xi)\cos(r_{p'q}, n_{p'})\cos(r_{p'q}, t_x)\}\frac{1}{r^3_{p'q}} - \\ &- \{\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x) + 2\cos(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(\xi, x) - \\ &- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(r_{p'p}, n_{p'})\cos(r_{p'p}, x)\}\frac{1}{r^3_{p'p}}\Big]\, d\sigma + \\ &+ b_0 \iint_{(S'')} y'\,[\ldots]\, d\sigma + \iint_{(S'')} O\left[t'^{1+\varepsilon} + t'^{1+\lambda}\right]\cdot[\cdots]\, d\sigma \\ = \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2 + \mathrm{II}_3,&\end{aligned}$$

falls

$$a_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \quad b_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

[24]) Bei SCHAUDER, l. c. Anm. [14]) wird auf der rechten Seite irrtümlicherweise nur ein $O\left[t'^{1+\varepsilon}\right]$ angegeben.

gesetzt ist. Das Integral II_3 läßt sich wie das Integral II beim Beweise des Hilfssatzes 5 abschätzen:

$$|\mathrm{II}_3| \leqq K A C r_{pq}^{\lambda} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+\varepsilon)}} + K A C r_{pq} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(1+\varepsilon+\lambda)}} +$$

$$+ K A C r_{pq}^{\lambda} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+\varepsilon+\lambda)}} + K A C r_{pq}^{\lambda} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+\lambda)}} +$$

$$+ K A C r_{pq} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{3-(1+2\lambda)}} + K A C r_{pq}^{\lambda} \int_{\frac{1}{2} r_{pq}}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho^{2-(1+2\lambda)}}$$

$$\leqq K A C r_{pq}^{\lambda}.$$

Von den Integralen II_1 und II_2 braucht nur eines, etwa II_1, abgeschätzt zu werden. Das Integral II_1 zerlege man analog zu der früheren Zerlegung von II in $J_1 + J_2 + J_3$ in die drei Teilintegrale

$$\mathrm{II}_1 = J_1' + J_2' + J_3'.$$

Nimmt man weiter bei J_1' die Zerspaltung vor, wie sie früher für J_1 angegeben wurde, so findet man bei Beachtung von $|x'| \leqq r_{p'p}$:

$$J_1' = \left| a_0 \iint_{(S'')} x' \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'q}, \xi) \cos(n_{p'}, t_x)}{r_{p'q}^3} - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, x)}{r_{p'p}^3} \right\} d\sigma \right|$$

$$\leqq K A C \iint_{(S'')} \frac{|x'| r_{pq} r_{p'q}^{\lambda}}{r_{p'q}^4} + \left| a_0 \iint_{(S'')} x' \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, t_x)}{r_{p'q}^3} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, x)}{r_{p'q}^3} \right\} d\sigma \right| +$$

$$+ K A C \iint_{(S'')} \frac{|x'| r_{p'p}^{\lambda} r_{pq}}{r_{p'q}^4} d\sigma$$

$$\leqq K A C r_{pq}^{\lambda} + \left| a_0 \iint_{(S'')} \frac{x' \cos^2(r_{p'p}, \xi) \{\cos(n_{p'}, t_x) - \cos(n_{p'}, x)\}}{r_{p'q}^3} d\sigma \right|.$$

Aus

$$\cos(r_{p'p}, \xi) = \cos(r_{p'p}, x) \cos(x, \xi) + \cos(r_{p'p}, y) \cos(y, \xi) +$$
$$+ \cos(r_{p'p}, z) \cos(z, \xi)$$

folgt aber nach (11) und (10)

$$\cos(r_{p'p}, \xi) = \left(-\frac{x'}{t'}\right) \cos(x, \xi) + \left(-\frac{y'}{t'}\right) \cos(y, \xi) +$$
$$+ O[t'^{\lambda}] \cos(x, \xi) + O[t'^{\lambda}] \cos(y, \xi) + O[t'^{\lambda}] \cos(z, \xi),$$

so daß auch

$$\cos^2(r_{p'p}, \xi) = \frac{x'^2}{t'^2}\cos^2(x, \xi) + \frac{y'^2}{t'^2}\cos^2(y, \xi) + \frac{2\,x'\,y'}{t'^2}\cos(x,\xi)\cos(y,\xi) + \\ + O[t'^{\lambda}]$$

ist.

Damit erhält man, wenn man neben (19), (7) und (8) beachtet, daß nach (16) und (12)

$$\frac{1}{r_{p'q}^3} \leqq \frac{K}{t'^3} + O\left[\frac{1}{t'^{3-\lambda}}\right]$$

gilt, die Abschätzung

$$\left| a_0 \iint\limits_{(S'')} \frac{x'\cos^2(r_{p'p}, \xi)\{\cos(n_{p'}, t_x) - \cos(n_{p'}, x)\}}{r_{p'q}^3}\, d\sigma \right| \\ \leqq \left| a_0\{\cos(x, t_x) - \cos(x, x)\} \iint\limits_{(S'')} \frac{x'\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, x)}{r_{p'q}^3}\, d\sigma \right| + \\ + \left| a_0\{\cos(y, t_x) - \cos(y, x)\} \iint\limits_{(S'')} \frac{x'\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, y)}{r_{p'q}^3}\, d\sigma \right| + \\ + \left| a_0\{\cos(z, t_x) - \cos(z, x)\} \iint\limits_{(S'')} \frac{x'\cos^2(r_{p'p}, \xi)\cos(n_{p'}, z)}{r_{p'q}^3}\, d\sigma \right| \\ \leqq K\,A\,C\,r_{pq}^{\lambda} + \\ + K\,A\,C\,r_{pq}^{\lambda} \left| \cos^2(x, \xi) \iint\limits_{(S'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma + \cos^2(y, \xi) \iint\limits_{(S'')} \frac{x'\,y'^2}{t'^5}\, d\sigma + \right. \\ \left. + 2\cos(x, \xi)\cos(y, \xi) \iint\limits_{(S'')} \frac{x'^2\,y'}{t'^3}\, d\sigma \right|.$$

Die drei hier auf der rechten Seite stehenden Integrale sind aber beschränkt, denn sie unterscheiden sich zunächst durch beschränkte Größen von den Integralen mit demselben Integranden, die aber statt über S'' über die Projektion S_1'' von S'' auf die Tangentialebene in p erstreckt werden. Ersetzt man weiterhin die Integrationsfläche S_1'' durch die konzentrisch zu p gelegene Kreisringfläche S_2'', deren Randkreisradien ϱ_1 und ϱ_2 ($\varrho_1 < \varrho_2$) gleich dem minimalen bzw. maximalen Abstand der Randpunkte von S_1'' vom Punkte p sind, dann wird z. B.

$$\iint\limits_{(S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma = \iint\limits_{(S_2'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma - \iint\limits_{(S_2''-S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma \\ = \int\limits_{\vartheta=0}^{2\pi} \int\limits_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{\cos^3\vartheta}{\varrho}\, d\varrho\, d\vartheta - \iint\limits_{(S_2''-S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma = -\iint\limits_{(S_2''-S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma.$$

Das letztere Integral ist aber, abgesehen von einem beschränkten Bestandteil, gleich dem Integral über ein Flächenstück, das von den inneren Randkurven von S_1'' und S_2'' berandet wird. Bezeichnet man den maximalen Abstand eines Punktes der inneren Randkurve von S_1'' vom Punkte p mit ϱ_3 ($\varrho_3 < 2\, r_{pq}$), so gilt

$$\left| \iint\limits_{(S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma \right| \leqq K \int_{\varrho_1}^{\varrho_3} \frac{d\varrho}{\varrho} < K \frac{\varrho_3 - \varrho_1}{\varrho_1} < K \frac{r_{pq}}{\varrho_1}.$$

Auf dem inneren Rand von S'' gibt es nun einen Punkt p^*, dessen Projektion von p den Abstand ϱ_1 hat. Es ist dann offensichtlich

$$\frac{r_{pp^*}}{\varrho_1} \leqq K.$$

Da aber für alle Punkte auf diesem Rande, also insbesondere für p^*, die Abschätzung

$$r_{pq} \leqq \tfrac{1}{2}\, r_{pq} + r_{pp^*}$$

oder

$$r_{pq} \leqq 2\, r_{pp^*}$$

besteht, so folgt schließlich, wie behauptet,

$$\left| \iint\limits_{(S_1'')} \frac{x'^3}{t'^5}\, d\sigma \right| \leqq K \frac{r_{pp^*}}{\varrho_1} \leqq K.$$

Ähnlich schließt man für die zwei verbleibenden Integrale.

Zur Abschätzung der Integrale J_1' und J_2' kann man unmittelbar die im 5. Abschnitt angegebenen Abschätzungen (34) und (35) für J_2 und J_3 verwenden, wenn man den dort auftretenden Exponenten μ durch 1 und B durch C ersetzt, so daß schließlich

$$|J_2'| \leqq KAC r_{pq}^{\lambda} \quad \text{und} \quad |J_3'| \leqq KAC r_{pq}^{\lambda}$$

wird.

7. *Für einen beliebigen Punkt P gilt*

$$\left.\begin{aligned} &\iint\limits_{(S)} \left| \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} \right| d\sigma, \\ &\iint\limits_{(S)} \left| \frac{\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, \eta)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} \right| d\sigma \end{aligned}\right\} \leqq K. \tag{37}$$

Das ist eine unmittelbare Folge der in der Potentialtheorie benötigten Abschätzung[25])

$$\iint\limits_{(S)} \left| \frac{\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} \right| d\sigma \leqq K. \tag{38}$$

[25]) Für den Beweis vgl. J. SCHAUDER, l. c. Anm. [14]), insbes. S. 628.

8. *Sind $V_i(p)$ und $V_a(p)$ bzw. $W_i(p)$ und $W_a(p)$ die Grenzwerte von $V(p)$ bzw. $W(p)$, wenn sich der Punkt P von innen oder außen einem Punkte p von S nähert, so gilt, falls $f(p)$ stetig ist,*

$$V_i(p) - V_a(p) = \frac{4\pi}{3} f(p)$$

und

$$V_i(p) + V_a(p) = 2 \iint_{(S)} f(p') \frac{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} d\sigma$$

bzw.

$$W_i(p) - W_a(p) = 0,$$

$$W_i(p) + W_a(p) = 2 \iint_{(S)} f(p') \frac{\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} d\sigma.$$

Schreibt man nämlich, um z. B. das erste Relationenpaar zu beweisen,

$$V(P) = f(p) \iint_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} d\sigma +$$

$$+ \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} d\sigma,$$

so erkennt man bei Beachtung des Hilfssatzes 7 in bekannter Schlußweise, daß das zweite Integral beim Durchgang durch die Fläche stetig ist. Der Hilfssatz 1 dieses Paragraphen liefert dann die Relationen

$$V_i(p) - f(p) \frac{4\pi}{3} = V(p) - f(p) \frac{2\pi}{3} = V_a(p)$$

oder

$$V_i(p) = V(p) + \frac{2\pi}{3} f(p), \tag{39}$$

$$V_a(p) = V(p) - \frac{2\pi}{3} f(p), \tag{40}$$

aus denen die Behauptung folgt.

Entsprechend hat man

$$W_i(p) = W(p), \tag{41}$$

$$W_a(p) = W(p). \tag{42}$$

9. *Besitzt die Belegung $f(p)$ partielle Ableitungen, die ihrerseits einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen, und konvergieren die*

Punktfolgen P_n^i bzw. P_n^a längs der Normalen von der einen oder anderen Seite von S gegen p, so gilt für das im Punkte p lokale Koordinatensystem

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial V(P)}{\partial x} = \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, x) +$$

$$+ 2 \cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(\xi, x) -$$

$$- 5 \cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, x)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma \pm \frac{2\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0,$$

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial W(P)}{\partial x} = \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(n_{p'}, x) +$$

$$+ \cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(\eta, x) + \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(\xi, x) -$$

$$- 5 \cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, x)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma.$$

Beweis. Es ist zunächst auf Grund von Hilfssatz 1:

$$\frac{\partial V(P)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ V(P) - f(p) \iint_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} d\sigma \right\}.$$

Schreibt man den rechts in der Klammer stehenden Ausdruck als ein einziges Integral über S und zerlegt es in der Form

$$\iint_{(S)} = \iint_{(S-s)} + \iint_{(s)},$$

wo s ein Teilflächenstück von S ist, das ganz im Innern von S_p enthalten ist, und dessen Projektion auf die Tangentialebene in p ein Kreis K_ε vom Radius ε ist ($\varepsilon < \varrho_0$), so brauchen wir uns wegen

$$\lim_{P \to p} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \iint_{(S-s)} \right\} = \lim_{P \to p} \iint_{(S-s)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(n_{p'}, x) +$$

$$+ 2 \cos(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'}) \cos(\xi, x) -$$

$$- 5 \cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'}) \cos(r_{p'P}, x)\} \frac{1}{r_{p'P}^3} d\sigma$$

$$= \iint_{(S-s)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, x) +$$

$$+ 2 \cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(\xi, x) -$$

$$- 5 \cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, x)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma$$

nur mit der Ableitung des Integrals $\iint\limits_{(s)}$ zu befassen, für die wir bei Beachtung von (36) auch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\iint\limits_{(s)} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(n_{p'}, x) \\ &+ 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(\xi, x) - \\ &- 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, x)\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \iint\limits_{(s)} y'\{\cdots\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma + \iint\limits_{(s)} O[t'^{1+\lambda}]\{\cdots\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma \\ &= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}\end{aligned}$$

schreiben können.

Für $|\mathrm{III}|$ gilt aber nach (2)

$$\begin{aligned}|\mathrm{III}| &\leqq \left|\iint\limits_{(s)} O[t'^{1+\lambda}]\left\{\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\}d\sigma\right| \\ &\leqq \iint\limits_{(s)} O\left[\frac{1}{t'^{2-\lambda}}\right]d\sigma \leqq O\left[\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{d\varrho}{\varrho^{1-\lambda}}\right] = O[\varepsilon^{\lambda}],\end{aligned}$$

so daß das Integral III mit $\varepsilon \to 0$ gegen Null geht.

Das Integral I zerlegen wir gemäß den drei Summanden in der geschweiften Klammer des Integranden in drei Teilintegrale. Das erste Teilintegral läßt sich wegen (2) und (7) folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x'\frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos n_{p'}, x)}{r^3_{p'P}}\,d\sigma\right| \\ &\leqq O\left[\iint\limits_{(s)}\frac{x'(t'^2+z'^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{t'^3}\,d\sigma\right] = O\left[\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{d\varrho}{\varrho^{1-\lambda}}\right] = O[\varepsilon^{\lambda}],\end{aligned}$$

wenn man noch nach (1) $z' = O[t'^{1+\lambda}]$ beachtet. Da gemäß

$$\begin{aligned}\cos(r_{p'P}, \xi) = \cos(r_{p'P}, x)\cos(x, \xi) + \cos(r_{p'P}, y)\cos(y, \xi) + \\ + \cos(r_{p'P}, z)\cos(z, \xi)\end{aligned}$$

und (5), (6) und (3) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\cos(r_{p'P}, \xi) = &-\frac{x'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(x, \xi) - \frac{y'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(y, \xi) + \\ &+ \frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(z, \xi) + O[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}]\end{aligned} \tag{43}$$

besteht, so erhält man für das zweite Teilintegral wegen (2) und (4) die Relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \, 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(\xi, x)\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma$$

$$= 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \left\{-\frac{x'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(x,\xi) - \frac{y'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(y,\xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(z,\xi) + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}$$

$$\left\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}\cos(\xi,x)\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^3} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\}d\sigma$$

$$= -2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\left\{\cos^2(\xi,x)\,h\iint\limits_{(s)}\frac{x'^2}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\sigma + \cos(\xi,x)\cos(\xi,y)\,h\iint\limits_{(s)}\frac{x'y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\sigma - \right.$$

$$\left. - \cos(\xi,x)\cos(\xi,z)\,h^2\iint\limits_{(s)}\frac{x'}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\sigma + O[\varepsilon^\lambda]\right\}$$

$$= -2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\cos^2(\xi,x)\,h\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta\int_0^{\varepsilon}\frac{\varrho^3}{(\varrho^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\varrho + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= -2\pi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\cos^2(\xi,x)\,h\left\{\left(-\varepsilon^2 - \frac{2h^2}{3}\right)\frac{1}{(\varepsilon^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{|h|}\right\} + O[\varepsilon^\lambda],$$

wenn man berücksichtigt, daß

$$\int\frac{x^3}{(x^2+a)^{\frac{5}{2}}}\,dx = \frac{-a^2 - \frac{2a}{3}}{(x^2+a)\sqrt{x^2+a}}$$

ist, die Abschätzungen

$$h\int_0^{\varepsilon}\frac{\varrho^3\,\varrho^\lambda}{(\varrho^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\varrho < \frac{h}{(h^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\varepsilon}\frac{\varrho^{3+\lambda}}{(\varrho^2)^{\frac{4}{2}}}\,d\varrho = O[\varepsilon^\lambda],$$

$$h^2\int_0^{\varepsilon}\frac{\varrho^2\,\varrho^\lambda}{(\varrho^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,d\varrho < \frac{h^2}{(h^2)^{\frac{2}{2}}}\int_0^{\varepsilon}\frac{\varrho^{2+\lambda}}{(\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\varrho = O[\varepsilon^\lambda]$$

bestehen, und die Integrale

$$\iint\limits_{(K_\varepsilon)}\frac{x'\,y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy = 0, \qquad \iint\limits_{(K_\varepsilon)}\frac{x'}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx\,dy = 0$$

sind, wie man unter Einführung von Polarkoordinaten sofort sieht. Bei festem ε und $h \to 0$ geht also das zweite Teilintegral gegen

$$\mp \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos^2(\xi, x) + O[\varepsilon^\lambda],$$

je nachdem der Fall $P_n^i \to p$ oder $P_n^a \to p$ vorliegt.

Für das dritte Teilintegral von I findet man schließlich nach (43), (2), (4) und (5)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \, 5 \cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'}) \cos(r_{p'P}, x) \frac{1}{r_{p'P}^3} \, d\sigma$$

$$= 5 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \left\{ \frac{x'^2}{t'^2 + h^2} \cos^2(x, \xi) + \frac{y'^2}{t'^2 + h^2} \cos^2(y, \xi) + \frac{h^2}{t'^2 + h^2} \cos^2(z, \xi) + \right.$$

$$+ 2 \frac{x' y'}{t'^2 + h^2} \cos(x, \xi) \cos(y, \xi) - 2 \frac{x' h}{t'^2 + h^2} \cos(x, \xi) \cos(z, \xi) -$$

$$\left. - 2 \frac{y' h}{t'^2 + h^2} \cos(y, \xi) \cos(z, \xi) + O[(t'^2 + h^2)^{\frac{\lambda}{2}}] \right\}$$

$$\left\{ \frac{h}{\sqrt{t'^2 + h^2}} + O[(t'^2 + h^2)^{\frac{\lambda}{2}}] \right\} \left\{ - \frac{x'}{\sqrt{t'^2 + h^2}} + O[(t'^2 + h^2)^{\frac{\lambda}{2}}] \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{t'^2 + h^2}^3} + O\left[\frac{1}{(t'^2 + h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}} \right] \right\} d\sigma$$

$$= - 5 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left\{ \cos^2(\xi, x) \, h \iint\limits_{(s)} \frac{x'^4}{(t'^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} \, d\sigma + \cos^2(\xi, y) \, h \iint\limits_{(s)} \frac{x'^2 y'^2}{(t'^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} \, d\sigma + \right.$$

$$+ \cos^2(\xi, z) \, h^3 \iint\limits_{(s)} \frac{x'^2}{(t'^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} \, d\sigma + 2 \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) h \iint\limits_{(s)} \frac{x'^3 y'}{(t'^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} \, d\sigma -$$

$$- 2 \cos(\xi, x) \cos(\xi, z) \, h^2 \iint\limits_{(s)} \frac{x'^3}{(t'^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} \, d\sigma -$$

$$\left. - 2 \cos(\xi, y) \cos(\xi, z) \, h^2 \iint\limits_{(s)} \frac{x'^2 y'}{(t'^2 + h^2)^{\frac{7}{2}}} \, d\sigma + O[\varepsilon^\lambda] \right\}$$

$$= - 5 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left[\cos^2(\xi, x) \frac{3\pi}{4} h \left\{ - \frac{\varepsilon^4}{5 (\varepsilon^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4}{5} \left(\varepsilon^2 + \frac{2h^2}{3}\right) \frac{1}{(\varepsilon^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8}{15} \frac{1}{|h|} \right\} + \right.$$

$$+ \cos^2(\xi, y) \frac{\pi}{4} h \left\{ - \frac{\varepsilon^4}{5 (\varepsilon^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4}{5} \left(\varepsilon^2 + \frac{2h^2}{3}\right) \frac{1}{(\varepsilon^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8}{15} \frac{1}{|h|} \right\} +$$

$$\left. + \cos^2(\xi, z) \pi h^3 \left\{ - \frac{\varepsilon^2}{5 (\varepsilon^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{15} \frac{1}{(\varepsilon^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{15} \frac{1}{|h|^3} \right\} \right] + O[\varepsilon^\lambda],$$

wenn man noch beachtet, daß

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\vartheta\, d\vartheta = \frac{3\pi}{4}, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^3\vartheta\, d\vartheta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = 0,$$

$$\int \frac{x^5}{(x^2+a)^{\frac{7}{2}}}\, dx = -\frac{x^4}{5\,(x^2+a)^{\frac{5}{2}}} - \frac{4}{5}\,\frac{x^2+\frac{2a}{3}}{(x^2+a)\sqrt{x^2+a}}$$

und

$$\int \frac{x^3}{(x^2+a)^{\frac{7}{2}}}\, dx = -\frac{x^2}{5\,(x^2+a)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2}{15}\,\frac{1}{(x^2+a)^{\frac{3}{2}}}$$

ist. Der Limes bei festem ε und $h \to 0$ des dritten Teilintegrals ist also

$$= \mp 5\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left[\cos^2(\xi, x)\,\frac{3\pi}{4}\,\frac{8}{15} + \cos^2(\xi, y)\,\frac{\pi}{4}\,\frac{8}{15} + \cos^2(\xi, z)\,\pi\,\frac{2}{15}\right] + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= \mp 2\pi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left[\cos^2(\xi, x) + \frac{1}{3}\cos^2(\xi, y) + \frac{1}{3}\cos^2(\xi, z)\right] + O[\varepsilon^\lambda],$$

je nachdem der Fall $P_n^i \to p$ oder $P_n^a \to p$ vorliegt.

Das Integral I konvergiert also für $h \to 0$ gegen

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \mathrm{I} = \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos^2(\xi, x) \pm 2\pi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \left[\cos^2(\xi, x) + \frac{1}{3}\cos^2(\xi, y) + \frac{1}{3}\cos^2(\xi, z)\right] + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= \pm \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 [\cos^2(\xi, x) + \cos^2(\xi, y) + \cos^2(\xi, z)] + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= \pm \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0.$$

Nimmt man mit dem Integral II eine entsprechende Zerlegung in drei Teilintegrale vor, so findet man, daß das erste ein $O[\varepsilon^\lambda]$ ist, während die beiden anderen ergeben

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \iint_{(s)} y'\, 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(\xi, x)\,\frac{1}{r_{p'P}^3}\, d\sigma$$

$$= -2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Big\{\cos^2(\xi, x)\, h \iint_{(s)} \frac{x'\,y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\, d\sigma + \cos(\xi, x)\cos(\xi, y)\, h \iint_{(s)} \frac{y'^2}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\, d\sigma -$$

$$- \cos(\xi, x)\cos(\xi, z)\, h^2 \iint_{(s)} \frac{y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}\, d\sigma + O[\varepsilon^\lambda],$$

d. h. für $h \to 0$:

$$\mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, y) + O[\varepsilon^\lambda]$$

bzw.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \iint\limits_{(s)} y'\, 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, x)\,\frac{1}{r_{p'P}^3}\,d\sigma$$

$$= -5\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Big\{\cos^2(\xi, x)\, h \iint\limits_{(s)} \frac{x'^3 y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\,d\sigma + \cos^2(\xi, y)\, h \iint\limits_{(s)} \frac{x' y'^3}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\,d\sigma +$$

$$+ \cos^2(\xi, z)\, h^2 \iint\limits_{(s)} \frac{x' y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\,d\sigma + 2\cos(\xi, x)\cos(\xi, y)\, h \iint\limits_{(s)} \frac{x'^2 y'^2}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\,d\sigma -$$

$$- 2\cos(\xi, x)\cos(\xi, z)\, h^2 \iint\limits_{(s)} \frac{x'^2 y'}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\,d\sigma -$$

$$- 2\cos(\xi, y)\cos(\xi, z)\, h^2 \iint\limits_{(s)} \frac{x' y'^2}{(t'^2+h^2)^{\frac{7}{2}}}\,d\sigma + O[\varepsilon^\lambda]\Big\},$$

d. h. für $h \to 0$

$$\mp 5\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 2\cos(\xi, x)\cos(\xi, y)\,\frac{\pi}{4}\,\frac{8}{15} + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, y) + O[\varepsilon^\lambda],$$

wenn man noch beachtet, daß

$$\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin^3\vartheta\, d\vartheta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin^3\vartheta\, d\vartheta = 0$$

ist.

Da mithin

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{II} = \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, y) \pm \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, y) +$$

$$+ O[\varepsilon^\lambda] = O[\varepsilon^\lambda]$$

ist, so folgt

$$\lim_{h\to 0} \iint\limits_{(s)} = \lim_{h\to 0}\{\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}\} = \pm \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + O[\varepsilon^\lambda].$$

10. *Unter der Voraussetzung von Hilfssatz 9 hat man für die Normalableitungen von V bzw. W die Limesrelationen*

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial V(P)}{\partial z} = \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, n_p) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(n_p, \xi) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, n_p)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma \mp$$
$$\mp \frac{4\pi}{3} \cos(\xi, z) \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y) \right\},$$

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial W(P)}{\partial z} = \iint_{(S)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(n_{p'}, n_p) +$$
$$+ \cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(n_p, \eta) +$$
$$+ \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(n_p, \xi) -$$
$$- 5\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, \eta) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, n_p)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma \mp$$
$$\mp \frac{2\pi}{3} \left\{ \cos(\xi, z) \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(x, \eta) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(y, \eta) \right) + \right.$$
$$\left. + \cos(\eta, z) \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(x, \xi) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(y, \xi) \right) \right\}.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 1 dieses Paragraphen ist

$$\frac{\partial V(P)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ V(P) - f(p) \iint_{(S)} \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}^2} d\sigma \right\}.$$

Wird der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck wieder analog wie bei dem Beweise von Hilfssatz 9 als ein Integral über S geschrieben und in der Form

$$\iint_{(S)} = \iint_{(S-s)} + \iint_{(s)}$$

zerlegt, so braucht wegen

$$\lim_{P \to p} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \iint_{(S-s)} \right\} = \lim_{P \to p} \iint_{(S-s)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(n_{p'}, n_p) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'}) \cos(n_p, \xi) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'}) \cos(r_{p'P}, n_p)\} \frac{1}{r_{p'P}^3} d\sigma$$
$$= \iint_{(S-s)} \{f(p') - f(p)\} \{\cos^2(r_{p'p}, \xi) \cos(n_{p'}, n_p) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(n_p, \xi) -$$
$$- 5\cos(r_{p'p}, \xi) \cos(r_{p'p}, n_{p'}) \cos(r_{p'p}, n_p)\} \frac{1}{r_{p'p}^3} d\sigma.$$

[man vergleiche hierzu (23)] nur noch der Limes von

$$\frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{(s)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(n_{p'}, n_p) +$$
$$+ 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(n_p, \xi) -$$
$$- 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, n_p)\} \frac{1}{r^3_{p'P}}\, d\sigma +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \iint\limits_{(s)} y' \{\cdots\} \frac{1}{r^3_{p'P}}\, d\sigma + \iint\limits_{(s)} O[t'^{1+\lambda}]\{\cdots\}\frac{1}{r^3_{p'P}}\, d\sigma$$
$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

untersucht zu werden.

Für III erkennt man genau, wie im vorhergehenden Abschnitt, daß

$$|\mathrm{III}| \leqq O[\varepsilon^\lambda]$$

ist. Zerlegt man I wieder in drei Teilintegrale, so findet man für das erste bei Beachtung von (43) und (8)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} \frac{x'\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(n_{p'}, n_p)}{r^3_{p'P}}\, d\sigma$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \Big\{ \frac{x'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(x, \xi) + \frac{y'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(y, \xi) + \frac{h^2}{t'^2+h^2}\cos^2(z, \xi) +$$
$$+ \frac{2x'y'}{t'^2+h^2}\cos(x, \xi)\cos(y, \xi) - \frac{2x'h}{t'^2+h^2}\cos(x, \xi)\cos(z, \xi) -$$
$$- \frac{2y'h}{t'^2+h^2}\cos(y, \xi)\cos(z, \xi) +$$
$$+ O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\Big\}\{1 + O[t'^\lambda]\}\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^3} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\} d\sigma,$$

so daß für $h \to 0$ sich der Grenzwert

$$\mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

ergibt.

Für das zweite Teilintegral von I folgt nach (43) und (4)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x'\, 2\cos(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(n_p, \xi)\frac{1}{r^3_{p'P}}\, d\sigma$$
$$= 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' \Big\{ -\frac{x'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(x, \xi) - \frac{y'}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(y, \xi) + \frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}}\cos(z, \xi) +$$
$$+ O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\Big\}\left\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}\cos(z, \xi)$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^3} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\} d\sigma,$$

so daß der Grenzwert für $h \to 0$

$$\mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

ist.

Für das dritte Teilintegral von I wird schließlich

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x' 5\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})\cos(r_{p'P}, n_p)\frac{1}{r^3_{p'P}}\,d\sigma$$

$$= 5\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \iint\limits_{(s)} x'\left\{\frac{x'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(x,\xi) + \frac{y'^2}{t'^2+h^2}\cos^2(y,\xi) + \frac{h^2}{t'^2+h^2}\cos^2(z,\xi) + \right.$$

$$+ \frac{2x'y'}{t'^2+h^2}\cos(x,\xi)\cos(y,\xi) - \frac{2x'h}{t'^2+h^2}\cos(x,\xi)\cos(z,\xi) -$$

$$\left. - \frac{2y'h}{t'^2+h^2}\cos(y,\xi)\cos(z,\xi) + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}$$

$$\left\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}\left\{\frac{h}{\sqrt{t'^2+h^2}} + O\left[(t'^2+h^2)^{\frac{\lambda}{2}}\right]\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{t'^2+h^2}^3} + O\left[\frac{1}{(t'^2+h^2)^{\frac{3-\lambda}{2}}}\right]\right\} d\sigma,$$

so daß der Grenzwert für $h \to 0$

$$\mp 10\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, z)\pi\frac{2}{15} + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

lautet.

Damit ist also erkannt, daß

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{I} = \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x)\cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

ist. Wird das Integral II entsprechend behandelt, so ergibt sich

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{II} = \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y)\cos(\xi, z) \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y)\cos(\xi, z) \pm$$

$$\pm \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y)\cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda]$$

$$= \mp \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y)\cos(\xi, z) + O[\varepsilon^\lambda],$$

so daß insgesamt

$$\lim_{\substack{P_n^i \to p \\ P_n^a \to p}} \frac{\partial}{\partial z}\iint\limits_{(s)} = \mp \frac{4\pi}{3}\cos(\xi, z)\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \cos(\xi, x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \cos(\xi, y)\right\} + O[\varepsilon^\lambda]$$

ist.

N. B. Die Grenzwerte in den Hilfssätzen 9 und 10 werden gleichmäßig angenommen.

11. *Genügt die Belegung $f(p)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ, so genügen die Integrale $V(P)$ und $W(P)$ in $R + S$ und in $R_a + S$ einer H-Bedingung mit dem gleichen Exponenten μ, wenn man hier, abweichend von der früher benutzten Terminologie, die Werte von V und W in einem Punkte p der Berandung S von R bzw. R_a durch*

$$V(p) = \lim_{P_n^i \to p} V(P_n^i), \quad W(p) = \lim_{P_n^i \to p} W(P_n^i)$$

bzw.

$$V(p) = \lim_{P_n^a \to p} V(P_n^a), \quad W(p) = \lim_{P_n^a \to p} W(P_n^a)$$

gegeben denkt.

Beweis[26]). Es seien P_1, P_2 zwei beliebige in R (oder in R_a) gelegene Punkte, für die

$$r_{P_1 P_2} = r_{12} < \frac{\varrho_0}{8}$$

gilt, und deren Entfernung von der Fläche kleiner als $\frac{\varrho_0}{4}$ ist. Versteht man unter K_{12} die Kugel mit dem Radius r_{12} um den Mittelpunkt P von $\overline{P_1 P_2}$, so sei

$$s = S \cdot K_{12},$$

wobei s natürlich auch die Nullmenge sein kann. Mit p_0 bezeichne man den P_1 am nächsten gelegenen Punkt von S, so daß

$$r_{p_0 P_1} < \frac{\varrho_0}{4}$$

ist. Die Strecke $\overline{p_0 P_1}$ steht dann offenbar auf S senkrecht.

Es kann nun

$$V(P_1) - V(P_2) = \iint_{(S)} \{f(p') - f(p_0)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'P_1}, \xi) \cos(r_{p'P_1}, n_{p'})}{r_{p'P_1}^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos^2(r_{p'P_2}, \xi) \cos(r_{p'P_2}, n_{p'})}{r_{p'P_2}^2} \right\} d\sigma$$
$$= \iint_{(s)} + \iint_{(S-s)}$$

geschrieben werden. Ist s nicht gleich der Nullmenge, so gibt es mindestens einen Punkt p von s mit

$$r_{pP_1} \leqq r_{pP} + r_{PP_1} \leqq r_{12} + \frac{1}{2} r_{12} = \frac{3}{2} r_{12},$$

[26]) Bei den für den Beweis benutzten Abschätzungen sind in Richtigstellung der ursprünglichen SCHAUDERschen Fassung einige Modifikationen angebracht worden, die auch bei der Behandlung des Potentials der Doppelschicht entsprechend zu benutzen sind.

so daß auch

$$r_{p_0 P_1} \leqq \frac{3}{2} r_{12}$$

und daher

$$r_{p p_0} \leqq r_{p P_1} + r_{P_1 p_0} \leqq 3 r_{12}$$

gilt. Da dann für jeden Punkt p von s

$$|f(p) - f(p_0)| \leqq 3 B r_{12}^{\mu}$$

ist, so folgt auf Grund von Hilfssatz 7 dieses Paragraphen, daß

$$(44) \quad \iint_{(s)} \{f(p') - f(p_0)\} \left\{ \frac{\cos^2 (r_{p' P_1}, \xi) \cos (r_{p' P_1}, n_{p'})}{r^2_{p' P_1}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos^2 (r_{p' P_2}, \xi) \cos (r_{p' P_2}, n_{p'})}{r^2_{p' P_2}} \right\} d\sigma$$
$$\leqq K B r_{12}^{\mu}$$

ist.

Außerhalb von K_{12} muß nach (13) und (17)

$$(45) \quad \left| \frac{\cos^2 (r_{p P_1}, \xi) \cos (r_{p P_1}, n_p)}{r^2_{p P_1}} - \frac{\cos^2 (r_{p P_2}, \xi) \cos (r_{p P_2}, n_p)}{r^2_{p P_2}} \right|$$
$$\leqq K \frac{r_{12}}{r^3_{p P_1}}$$

sein. Versteht man unter $K_{\varrho_0}^{(p_0)}$ die feste Kugel mit dem Radius $\frac{\varrho_0}{2}$ um p_0, so ist s, da für einen beliebigen Punkt p von s

$$r_{p p_0} \leqq 3 r_{12} < \frac{\varrho_0}{2}$$

gilt, in $K_{\varrho_0}^{(p_0)}$ enthalten. Die Menge $S - S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)}$ liegt also außerhalb von K_{12}. Da aber für einen beliebigen Punkt p von ihr

$$r_{p P_1} \geqq r_{p p_0} - r_{p_0 P_1} \geqq \frac{\varrho_0}{2} - \frac{\varrho_0}{4} = \frac{\varrho_0}{4}$$

sein muß, so ergibt sich nach der gleichzeitig erfüllten Ungleichung (45) die Abschätzung

$$(46) \quad \left| \iint_{(S - S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)})} \right| \leqq K B r_{12},$$

wenn für die Konstante B der H-Bedingung für $f(p)$ gleichzeitig $\operatorname{Max} |f(p)| \leqq B$ gilt.

Versteht man weiter unter R_{12} die Kugel vom Radius r_{12} um den Punkt p_0 und ist $\sigma = S \cdot R_{12}$, so gilt nach dem Hilfssatz 7 dieses Paragraphen

$$(47)\quad \left| \iint\limits_{(\sigma)} \{f(p') - f(p_0)\} \left\{ \frac{\cos^2(r_{p'P_1}, \xi)\cos(r_{p'P_1}, n_{p'})}{r^2_{p'P_1}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\cos^2(r_{p'P_2}, \xi)\cos(r_{p'P_2}, n_{p'})}{r^2_{p'P_2}} \right\} d\sigma \right|$$
$$\leqq K B r_{12}^{\mu} \left\{ \iint\limits_{(\sigma)} \left| \frac{\cos^2(r_{p'P_1}, \xi)\cos(r_{p'P_1}, n_{p'})}{r^2_{p'P_1}} \right| d\sigma + \right.$$
$$\left. + \iint\limits_{(\sigma)} \left| \frac{\cos^2(r_{p'P_2}, \xi)\cos(r_{p'P_2}, n_{p'})}{r^2_{p'P_2}} \right| d\sigma \right\}$$
$$\leqq K B r_{12}^{\mu}.$$

Für einen beliebigen Punkt p von $S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)}$ bestehen nun die Abschätzungen

$$(48)\qquad r_{pp_0} \leqq KA(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r_{pP_1} \geqq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}},$$

wenn man das in p_0 lokale rechtwinklige Koordinatensystem zugrunde legt, bei dem die Strecke $\overline{p_0 P_1}$ auf der z-Achse liegt. Daher findet man nach (45) und (48)

$$(49)\qquad \left| \iint\limits_{(S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)} - (s \dot{+} \sigma))} \right| \leqq K B r_{12} \iint\limits_{(S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)} - (s \dot{+} \sigma))} \frac{r^{\mu}_{p'p_0}}{r^3_{p'P_1}} d\sigma$$
$$\leqq KAB r_{12} \iint\limits_{(S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)} - (s \dot{+} \sigma))} \frac{1}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3-\mu}{2}}} d\sigma \leqq KAB r_{12}^{\mu}.$$

Aus (44), (46), (47) und (49) folgt aber insgesamt

$$|V(P_1) - V(P_2)| = \left| \iint\limits_{(s)} + \iint\limits_{(S - S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)})} + \iint\limits_{(\sigma)} + \iint\limits_{(S \cdot K_{\varrho_0}^{(p_0)} - (s \dot{+} \sigma))} \right| \leqq KBr_{12}^{\mu}$$

q. e. d.

12. *Die in diesem Paragraphen für den Raum abgeleiteten Hilfssätze gelten mutatis mutandis auch für die Ebene.*

Sind ξ, η die Koordinaten in bezug auf ein beliebiges in der Ebene gelegenes rechtwinklig-kartesisches Bezugssystem, so bestehen, falls die Kurve S den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt, die (24) und (25) entsprechenden Relationen

$$(50)\quad \int\limits_{(S)} \left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}} \right)}{\partial n_{p'}} ds = \int\limits_{(S)} -\frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi)\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r^2_{p'P}} ds = \begin{cases} \pi \\ \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem P im Innengebiet von S, auf S oder im Außengebiet von S liegt, und

$$(51)\qquad \int_{(S)} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds = \int_{(S)} \frac{\cos(r_{p'P},\xi)\cos(r_{p'P},\eta)\cos(r_{p'P},n_{p'})}{r_{p'P}}\,ds = 0$$

bei beliebiger Lage des Aufpunktes P. Den Beweis von (50) und (51) kann man unter Benutzung des erst an einer späteren Stelle dieser Arbeit angegebenen ebenen Analogons (161), (162) der räumlichen Beziehungen (30) mit derselben Methode erbringen, die zum Beweise von (24) und (25) herangezogen wurde.

Mit geometrischen Hilfssätzen in der Art, wie sie in § 2 angegeben wurden, können die Analoga der Hilfssätze 2 bis 11 für den ebenen Fall bewiesen werden. Die Analoga der Hilfssätze 2 bis 6 lassen sich jedoch auch unmittelbar aus den bereits bewiesenen Sätzen für den räumlichen Fall ablesen, wie jetzt noch kurz gezeigt werden soll[27]).

Man ergänze das ξ, η-Koordinatensystem durch eine zur ξ, η-Ebene senkrechte ζ-Achse zu einem räumlichen Bezugssystem und bilde mit Hilfe der auf der Kurve S definierten integrablen Funktion $f(p)$ das über einen unendlich langen Zylinder, dessen Erzeugende der ζ-Achse parallel sind, erstreckte Integral

$$(52)\qquad \lim_{b\to\infty}\int_{(S)}\left\{\int_{-b}^{b} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\,d\zeta\right\}ds,$$

wobei p der auf dem Zylinder gelegene Integrationspunkt, P ein Punkt der ξ, η-Ebene ist und die Definition von $f(p)$ dadurch auf alle Punkte p des Zylinders erweitert wird, daß für sie der Wert der Funktion gleich dem an denjenigen auf S gelegenen Punkten p' angenommenen Wert ist, die dieselben ξ, η-Koordinaten besitzen.

Da aber mit

$$r_{pP} = \sqrt{r_{p'P}^2 + \zeta^2}$$

die Gleichungen

$$\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi} = \frac{r_{p'P}}{\sqrt{r_{p'P}^2+\zeta^2}}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi} \quad\text{und}\quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} = -\frac{r_{p'P}}{(r_{p'P}^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_p}$$

[27]) Vgl. hierzu O. D. KELLOG, Foundations of potential theory. Berlin 1929. Insbes. S. 172—174.

bestehen, so erhält man

$$\int_{-b}^{b} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\,d\zeta = -f(p')\,r_{p'P}^3\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \int_{-b}^{b} \frac{d\zeta}{(r_{p'P}^2+\zeta^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= -f(p')\,r_{p'P}^3\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}}\left[\left(\frac{2}{3r_{p'P}^4}\zeta^3+\frac{1}{r_{p'P}^2}\zeta\right)\frac{1}{(r_{p'P}^2+\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}\right]_{-b}^{b}$$

und also

$$\lim_{b\to\infty}\int_{(S)}\left\{\int_{-b}^{b} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\,d\zeta\right\} ds$$

$$= \frac{4}{3}\int_{(S)} f(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds. \tag{53}$$

Wählt man nun eine feste Zahl a mit $0 < a < b$, so wird

$$\lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\,d\zeta = -f(p')\,r_{p'P}^3\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}}\left[\frac{2}{3r_{p'P}^4} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{2a^3}{3r_{p'P}^4}+\frac{a}{r_{p'P}^2}\right)\frac{1}{(r_{p'P}^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

und

$$\lim_{b\to\infty}\int_{b}^{-a} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\,d\zeta = -f(p')\,r_{p'P}^3\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}}\cdot$$

$$\cdot\left[-\left(\frac{2a^3}{3r_{p'P}^4}+\frac{a}{r_{p'P}^2}\right)\frac{1}{(r_{p'P}^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{3r_{p'P}^4}\right],$$

so daß wegen (53)

$$V'(p) = \int_{(S)} f(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds \tag{54}$$

$$= \frac{3}{4}\int_{(S)}\left\{\int_{-a}^{a} f(p)\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\,d\zeta\right\} ds -$$

$$-\frac{3}{2}\int_{(S)} f(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}}\left[\frac{2}{3r_{p'P}} - \left(\frac{2a^3}{3r_{p'P}}+a\,r_{p'P}\right)\frac{1}{(r_{p'P}^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\right] ds$$

sein muß.

Das erste rechts stehende Integral ist aber ein Integral von dem Typ, wie er in den vorhergehenden Abschnitten dieses Paragraphen untersucht wurde, so daß die darauf bezüglichen Sätze unmittelbar angewendet werden können. Es ist allerdings anzumerken, daß das herausgeschnittene Stück der Zylinderfläche keine geschlossene Fläche darstellt. Da uns aber das Verhalten eines solchen Integrals und seiner Tangentialableitungen lediglich in Flächenpunkten p interessiert, die gleichzeitig der Kurve S angehören, so können wir das Zylinderflächenstück einfach dadurch zu einer geschlossenen Fläche ergänzen, sofern das bei den Beweisen erforderlich ist, daß wir die von der Zylinderfläche herausgeschnittenen endlichen Flächenstücke in den Ebenen $\zeta = \pm a$ hinzunehmen.

Das zweite Integral rechts ist dagegen an jeder Stelle P der ξ, η-Ebene beliebig oft partiell nach ξ und η differenzierbar. Um das zu erkennen, bedarf es nur der Untersuchung einer auf S gelegenen Stelle, für die ja $r_{p'P} = 0$ sein kann. In der Umgebung einer solchen Stelle mit $r_{p'P} = 0$ gilt aber die Reihenentwicklung

$$\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{2}{3 r_{p'P}} - \left(\frac{2a^3}{3 r_{p'P}} + a\, r_{p'P}\right) \frac{1}{(r_{p'P}^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= \frac{(\xi' - \xi)^2}{r_{p'P}^2} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{2}{3 r_{p'P}} - \left(\frac{2}{3 r_{p'P}} + \frac{r_{p'P}}{a^2}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{r_{p'P}}{a}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{r_{p'P}}{a}\right)^4 - + \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{(\xi' - \xi)^2}{r_{p'P}^2} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{r_{p'P}}{a^2} - \frac{r_{p'P}}{a^2} - \frac{1}{4}\frac{r_{p'P}^3}{a^4} + \frac{3}{2}\frac{r_{p'P}^3}{a^4} + \cdots\right]$$

$$= \frac{(\xi' - \xi)^2}{r_{p'P}^2} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{5}{4}\frac{r_{p'P}^3}{a^4} + \cdots\right],$$

wobei in der zuletzt angeschriebenen Reihe nur Potenzen mit einem ungeradzahligen Exponenten größer gleich 3 auftreten, so daß man schließlich mit geeigneten Koeffizienten $a_1, a_3, \ldots$

$$\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[\frac{2}{3 r_{p'P}} - \left(\frac{2a^3}{3 r_{p'P}} + a\, r_{p'P}\right) \frac{1}{(r_{p'P}^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= (\xi' - \xi)^2 \frac{\partial r_{p'P}}{\partial n_{p'}} \left[a_1 r_{p'P} + a_3 r_{p'P}^3 + a_5 r_{p'P}^5 + \cdots\right]$$

$$= (\xi' - \xi)^2 \frac{\partial}{\partial n_{p'}} \left[\frac{a_1}{2} r_{p'P}^2 + \frac{a_3}{4} r_{p'P}^4 + \cdots\right]$$

schreiben kann. Da hier aber in der eckigen Klammer eine Potenzreihe steht, die nach Potenzen von $(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2$ fortschreitet, so ist klar, daß der letztere Ausdruck an der Stelle $\xi = \xi'$, $\eta = \eta'$ und damit, wie behauptet, das zweite Integral auf der rechten Seite von (54) auch an einer auf S gelegenen Stelle beliebig oft nach ξ und η differenziert werden kann.

Für das Integral

$$W'(P) = \int_{(S)} f(p') \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta} \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds$$

kann man eine zu (54) analoge Formel aufstellen und daraus dieselben Schlüsse ziehen.

Beachtet man, daß wegen der zu (38) analogen Relation

$$\int_{(S)} \left| \frac{\cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}} \right| ds \leqq K,$$

bei der K eine von der Lage des Punktes P unabhängige Konstante ist, die Abschätzungen

$$\left.\begin{aligned} &\int_{(S)} \left| \frac{\cos^2(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}} \right| ds, \\ &\int_{(S)} \left| \frac{\cos(r_{p'P}, \xi) \cos(r_{p'P}, \eta) \cos(r_{p'P}, n_{p'})}{r_{p'P}} \right| ds \end{aligned}\right\} \leqq K$$

bestehen, so ergeben sich die (39), (40), (41) und (42) entsprechenden Relationen

$$V_i'(p) = V'(p) + \frac{\pi}{2} f(p), \tag{55}$$

$$V_a'(p) = V'(p) - \frac{\pi}{2} f(p), \tag{56}$$

$$W_i'(p) = W'(p), \tag{57}$$

$$W_a'(p) = W'(p), \tag{58}$$

falls die Funktion $f(p)$ als stetig vorausgesetzt wird.

Besitzt die Funktion $f(p)$ eine erste partielle Ableitung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Kurvenexponenten λ genügt, und versteht man unter x, y ein in einem Punkte p von S lokales Koordinatensystem, bei

dem die y-Achse in die Richtung der in das Innere von R weisenden Normalen zeigt, so folgt aus Hilfssatz 9 und 10 unmittelbar, daß die Grenzwerte

$$(59)\quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial V'(P_n^i)}{\partial x}, & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial V'(P_n^a)}{\partial x}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial V'(P_n^a)}{\partial y}, & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial V'(P_n^a)}{\partial y}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial W'(P_n^i)}{\partial x}, & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial W'(P_n^a)}{\partial x}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial W'(P_n^a)}{\partial y}, & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial W'(P_n^a)}{\partial y} \end{cases}$$

existieren, wenn die Punktfolgen P_n^i bzw. P_n^a von innen bzw. von außen gegen p konvergieren, und daß insbesondere bei Beachtung von (54)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\partial V'(P_n^i)}{\partial x} - \frac{\partial V'(P_n^a)}{\partial x}\right\} = \frac{3}{4}\,\frac{4\pi}{3} = \pi$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\partial W'(P_n^i)}{\partial x} - \frac{\partial W'(P_n^a)}{\partial x}\right\} = 0$$

ist. Unter derselben Voraussetzung über $f(p)$ gelten dann aber die folgenden später benötigten Limesrelationen

$$(60)\quad \lim_{n\to\infty}\left\{\left(2\,\frac{\partial V'(P_n^i)}{\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\dfrac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,ds\right]_{P=P_n^i}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(2\,\frac{\partial V'(P_n^a)}{\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\dfrac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,ds\right]_{P=P_n^a}\right)\right\} = 2\pi - 2\pi = 0,$$

da

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\dfrac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,ds\right]_{P=P_n^i} - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{(S)} f(p')\,\frac{\partial\left[\log\dfrac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}\,ds\right]_{P=P_n^a}\right\} = 2\pi$$

ist, und

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2\frac{\partial W'(P_n^i)}{\partial x}\pm\left[\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S)} f(p')\frac{\partial\left[\log\frac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}ds\right]_{P=P_n^i}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(2\frac{\partial W'(P_n^a)}{\partial x}\pm\left[\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S)} f(p')\frac{\partial\left[\log\frac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}ds\right]_{P=P_n^a}\right)\right\}=0 \tag{61}$$

wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S)} f(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds\right]_{P=P_n^i}-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(S)} f(p')\frac{\partial\left[\log\frac{1}{r_{p'P}}\right]}{\partial n_{p'}}ds\right]_{P=P_n^a}\right\}=0.$$

§ 4.

Das innere Problem im Raume.

1. Wir wollen in diesem Paragraphen für das innere räumliche Problem folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz beweisen:

Hauptsatz I. *Genügt die Berandung S des einfach zusammenhängenden ganz im Endlichen gelegenen Gebietes R den im § 1 genannten Voraussetzungen, und besitzen die auf S definierten Funktionen ϱ, σ, τ dort partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, und sind sie die auf S angenommenen Werte der partiellen Ableitungen erster Ordnung einer in R zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi(\xi,\eta,\zeta)$, so gibt es (bis auf eine additive Konstante) genau eine in R biharmonische Funktion U, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R+S$ stetig sind und auf S bzw. mit ϱ, σ, τ übereinstimmen.*

Nimmt man an, daß es eine biharmonische Funktion U mit den verlangten Eigenschaften gibt, und setzt man

$$u=\frac{\partial U}{\partial\xi},\quad v=\frac{\partial U}{\partial\eta},\quad w=\frac{\partial U}{\partial\zeta},\quad \vartheta=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\partial w}{\partial\zeta}=\Delta U,$$

so genügen die Funktionen u, v, w, ϑ offenbar im Gebiet R den Differentialgleichungen

$$\Delta u-\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}=0,\quad \Delta v-\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}=0,\quad \Delta w-\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}=0,\quad \Delta\vartheta=0, \tag{62}$$

sowie den (im Sinne von Grenzübergängen aus R auf S zu verstehenden) Randbedingungen

$$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \quad [w]_S = \tau, \tag{63}$$

und umgekehrt gilt der gleich zu beweisende

Satz 1. *Sind die Funktionen ϱ, σ, τ die auf S angenommenen Werte der partiellen Ableitungen einer in R zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, und gibt es ein Lösungssystem u, v, w des Problems* (62), (63), *das in $R + S$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt, so existiert eine biharmonische Funktion U derart, daß*

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

ist.

Mit diesem Satz 1 ist aber zugleich der Hauptsatz I, jedenfalls was die Existenz einer Lösung anlangt, bewiesen, wenn man die folgenden in den Abschnitten 4 bis 11 zu beweisenden Sätze heranzieht:

Satz 2. *Bei beliebig vorgegebenen auf S stetigen Funktionen ϱ, σ, τ hat das Problem* (62), (63) *in R stets eine Lösung.*

Satz 3. *Besitzen die Funktionen ϱ, σ, τ auf S überdies partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so sind die nach Satz 2 existierenden Lösungsfunktionen in $R + S$ einmal stetig partiell differenzierbar.*

Der Nachweis für die im Hauptsatz I behauptete Einzigkeit der Lösung bleibt einem besonderen Abschnitt vorbehalten, wo sie sogar unter allgemeineren Voraussetzungen aufgezeigt werden wird.

2. Dem Beweise des Satzes 1 schicken wir einen Hilfssatz voraus, der auch für die folgenden Schlüsse benötigt wird: *Genügt die Berandung S des einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Gebiet R den in § 1 genannten Voraussetzungen, so kann man eine unendliche Folge von ganz in R gelegenen, denselben Voraussetzungen genügenden, gegen S konvergierenden Flächen S_n konstruieren, die die Eigenschaft besitzen, daß für eine Folge von integrablen und gleichmäßig beschränkten Funktionen $f_n(p)$, die resp. auf S_n definiert sind, und die für $n \to \infty$ gegen eine auf S definierte integrable Funktion $f(p)$ konvergieren, die Limesrelation*

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{(S_n)} f_n(p)\, d\sigma = \iint\limits_{(S)} f(p)\, d\sigma$$

gilt.

Beweis. Die zu $R + S$ gehörige Greensche Funktion, die auf S verschwindet und in einem Punkte P von R einen Pol aufweist, werde mit G bezeichnet. Die Funktion G besitzt bei den getroffenen Regularitätsvoraus-

setzungen über S nach Sätzen von Schauder [28]) und Kellog [29]) in dem abgeschlossenen Bereich $R + S$ mit Ausnahme des Punktes P stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Für die Normalableitung $\left[\frac{\partial G}{\partial n}\right]_S$ muß, wie von L. Lichtenstein [30]) bewiesen wurde,

$$\left[\frac{\partial G}{\partial n}\right]_S \neq 0$$

sein. Ist p ein beliebiger Punkt auf S, so bezeichne man mit Z_{ϱ_1} das Innere eines Kreiszylinders, dessen Grundkreisfläche den Radius ϱ_1 besitzt, der die Höhe $2\,\varrho_1$ hat, dessen Mittelpunkt mit p zusammenfällt und dessen Achse mit der Normale n_p im Punkte p identisch ist. Man kann dann sicher den Radius ϱ_1 so klein wählen, daß erstens ϱ_1 kleiner als ϱ_0 ist, wobei ϱ_0 die in der Einleitung angegebene Bedeutung hat, daß zweitens in der Durchschnittsmenge von $R + S$ und Z_{ϱ_1}

$$\frac{\partial G}{\partial n_p} \neq 0$$

ist, und daß drittens Z_{ϱ_1} den Punkt P nicht enthält. Versteht man weiter unter B den Bereich, der alle Punkte von R enthält, deren Entfernung von S größer oder gleich als $\delta > 0$ sei, wobei $\delta < \varrho_1$ ist, so wird die Funktion G in B ein positives Minimum M annehmen.

Es soll nun gezeigt werden, daß die durch

$$G = \frac{M}{n} \quad (n = \text{ganze Zahl} \geqq 2)$$

gegebenen Äquipotentialflächen eine Flächenschar S_n mit den gewünschten Eigenschaften ergeben.

Jeder Punkt des Bereiches B_1, der aus allen Punkten von $R + S$ besteht, deren Entfernung von S kleiner oder gleich δ ist, gehört nun einem Zylinder Z_{ϱ_1} an. Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz läßt sich dann B_1 bereits mit endlich vielen Z_{ϱ_1} überdecken. Da jeder Punkt der Fläche S_n ($n \geqq 2$) von S um weniger als δ entfernt ist, so gehört jede solche Fläche ganz dem Bereich B_1 an und wird also ebenfalls von den endlich vielen Zylindern Z_{ϱ_1} überdeckt.

Ist p der Mittelpunkt eines von diesen Zylindern, so wähle man in p das Tangential-Normalkoordinatensystem x, y, z. Enthält dieser Zylinder das

[28]) J. Schauder, l. c., Anm. [14]).

[29]) O. D. Kellog, l. c., Anm. [15]).

[30]) L. Lichtenstein, Über eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktion. Math. Zeitschr. **11** (1921), S. 319—320.

Flächenstück F_n von S_n, und ist (x_0, y_0, z_0) ein beliebiger darauf gelegener Punkt, so kann F_n nach dem Satz über implizite Funktionen in einer gewissen Umgebung dieses Punktes eindeutig und analytisch in der Form

$$z = \varphi_n(x, y)$$

dargestellt werden, da ja

$$\frac{\partial G(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$$

ist. Diese eindeutige Darstellung läßt sich aber auf das ganze Flächenstück F_n ausdehnen, denn wäre für zwei beliebige Punkte (x_0, y_0, z_0) und $(x_0, y_0, z_0 + l)$ von R, die gleichzeitig Z_{ϱ_1} angehören,

$$G(x_0, y_0, z_0) = G(x_0, y_0, z_0 + l),$$

so müßte nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$l \frac{\partial G(x_0, y_0, z_0 + \vartheta l)}{\partial z} = 0 \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

sein, wenn man noch beachtet, daß wegen der eindeutigen und stetigen Darstellbarkeit des Z_{ϱ_1} angehörenden Flächenstückes F von S in der Form

$$z = \varphi(x, y)$$

mit (x_0, y_0, z_0) und $(x_0, y_0, z_0 + l)$ auch alle Punkte $(x_0, y_0, z_0 + \vartheta l)$ für $0 < \vartheta < 1$ dem Gebiet $Z_{\varrho_1} \cdot R$ angehören.

Da aber

$$\frac{\partial G(x_0, y_0, z_0 + \vartheta l)}{\partial z} \neq 0$$

ist, so folgt notwendig

$$l = 0.$$

Man überlegt sich weiterhin, daß jede Fläche S_n die Berandung eines einfach zusammenhängenden Gebietes ist[31]).

Bezeichnet man die Projektion von F_n bzw. F auf die x-y-Ebene mit $\overline{F}_n$ bzw. $\overline{F}$, so wird zunächst

$$\iint_{(F_n)} f_n(p)\, d\sigma = \iint_{(\overline{F}_n)} f_n(x, y) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Da hier die Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial G(x, y, \varphi_n(x, y))}{\partial x}}{\dfrac{\partial G(x, y, \varphi_n(x, y))}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial G(x, y, \varphi_n(x, y))}{\partial y}}{\dfrac{\partial G(x, y, \varphi_n(x, y))}{\partial z}}$$

[31]) Vgl. hierzu O. D. Kellog, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 238—239.

für alle n ($n \geqq 2$) gleichmäßig beschränkt sind, und

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x, y) = \varphi(x, y),$$

$$\lim_{n \to \infty} \overline{F_n} = \overline{F}$$

ist, so folgt nach dem Satz von Arzèla-Lebesgue

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{(\overline{F_n})} f_n(p)\, d\sigma = \iint\limits_{(\overline{F})} f(p)\, d\sigma.$$

Beachtet man schließlich, daß die Flächen S und S_n durch die endlich vielen überdeckenden Zylinder Z_{ϱ_1} in endlich viele Stücke zerlegt werden, deren Randkurven stückweise stetige Tangenten besitzen[32]), und deren jedes auch, wenn es mehreren Z_{ϱ_1} gleichzeitig angehört, jeweils nur einem dieser Zylinder zugeordnet sei, so folgt durch Summation, wie behauptet,

$$\lim_{n \to \infty} \iint\limits_{(S_n)} f_n(p)\, d\sigma = \iint\limits_{(S)} f(p)\, d\sigma.$$

3. Man bilde nun, um den Satz 1 zu beweisen, mit Hilfe der in $R + S$ einmal stetig partiell differenzierbaren Lösungsfunktionen u, v, w des Problems (62), (63) und der gegebenen in R zweimal stetig differenzierbaren Funktion Φ die neuen Funktionen

$$\bar{u} = u - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \bar{v} = v - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \bar{w} = w - \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \tag{64}$$

für die offenbar

$$[\bar{u}]_S = 0, \quad [\bar{v}]_S = 0, \quad [\bar{w}]_S = 0 \tag{65}$$

ist.

Da alsdann

$$w_1 = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \zeta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \quad w_2 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial w}{\partial \xi},$$
$$w_3 = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \tag{66}$$

sein muß, so folgt aus (62)

$$\frac{\partial w_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_3}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial \xi} - \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial \eta} - \frac{\partial w_2}{\partial \zeta} = 0. \tag{67}$$

[32]) Vgl. hierzu O. D. Kellog, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 97—107.

Auf den von den im zweiten Abschnitt konstruierten Flächen S_n begrenzten Bereich $R_n + S_n$ wende man den Gaussschen Integralsatz in der Form

$$\iiint\limits_{(R_n)} \left\{\bar{u}\left(\frac{\partial w_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_3}{\partial \eta}\right) + v\left(\frac{\partial w_3}{\partial \xi} - \frac{\partial w_1}{\partial \zeta}\right) + \bar{w}\left(\frac{\partial w_1}{\partial \eta} - \frac{\partial w_2}{\partial \xi}\right)\right\} d\tau$$

$$(68) \quad = \iiint\limits_{(R_n)} \{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2\}\, d\tau + \iint\limits_{(S_n)} \{u\,(w_2 \cos(n_{\mu'}, \zeta) - w_3 \cos(n_{\mu'}, \eta))$$

$$+ \bar{v}\,(w_2 \cos(n_{\mu'}, \xi) - w_1 \cos(n_{\mu'}, \zeta)) + \bar{w}\,(w_1 \cos(n_{\mu'}, \eta) - w_2 \cos(n_{\mu'}, \xi))\}\, d\sigma$$

an. Da bei Beachtung von (67) die linke Seite von (68) und wegen (65) auch der Limes des rechts stehenden Oberflächenintegrals für $n \to \infty$ auf Grund des im zweiten Abschnitt bewiesenen Hilfssatzes verschwindet, so folgt aus der damit resultierenden Relation

$$\iiint\limits_{(R)} \{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2\}\, d\tau = 0,$$

daß die Funktionen w_1, w_2 und w_3 in R identisch verschwinden. Gemäß (66) existiert aber alsdann in R tatsächlich eine Funktion $U(\xi, \eta, \zeta)$ derart, daß

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

ist, wobei nach (62) und (63)

$$\Delta\Delta U \equiv 0 \text{ in } R$$

und

$$\left[\frac{\partial U}{\partial \xi}\right]_S = \varrho, \quad \left[\frac{\partial U}{\partial \eta}\right]_S = \sigma, \quad \left[\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right]_S = \tau$$

wird.

4. Bei dem Beweis des Satzes 2, zu dem wir nunmehr in den Abschnitten 4 bis 6 übergehen, benutzen wir ein von Lauricella[33]) ausgebautes elegantes Schlußverfahren Fredholms[34]).

Neben der Problemstellung (62), (63) betrachte man zugleich die bereits im § 3, Abschnitt 1 herangezogenen Differentialgleichungen

$$(69) \quad \Delta u + k\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v + k\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w + k\frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = 0, \quad \Delta \vartheta = 0$$

und Randbedingungen

$$(70) \qquad [u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \quad [w]_S = \tau$$

mit k als Parameter, wie sie beim Hauptproblem der Elastizitätstheorie auftreten.

---

[33]) G. Lauricella, l. c., Anm. [12]).

[34]) J. Fredholm, l. c., Anm. [13]).

Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$\varkappa = \frac{k}{2+k},$$

$$K_{\xi\xi}(P,p;\varkappa) = \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$
$$= \frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2} + \varkappa\{3\cos^2(r_{pP}, \xi) - 1\}\frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2},$$

$$K_{\xi\eta}(P,p;\varkappa) = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$
$$= 3\varkappa\frac{\cos(r_{pP}, \xi)\cos(r_{pP}, \eta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2},$$

$$K_{\xi\zeta}(P,p;\varkappa) = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$
$$= 3\varkappa\frac{\cos(r_{pP}, \xi)\cos(r_{pP}, \zeta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2},$$

(71)
$$K_{\eta\xi}(P,p;\varkappa) = K_{\xi\eta}(P,p;\varkappa),$$

$$K_{\eta\eta}(P,p;\varkappa) = \frac{2k}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$
$$= \frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2} + \varkappa\{3\cos^2(r_{pP}, \eta) - 1\}\frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2},$$

$$K_{\eta\zeta}(P,p;\varkappa) = \frac{3k}{2+k}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$
$$= 3\varkappa\frac{\cos(r_{pP}, \eta)\cos(r_{pP}, \zeta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2},$$

$$K_{\zeta\xi}(P,p;\varkappa) = K_{\xi\zeta}(P,p;\varkappa), \quad K_{\zeta\eta}(P,p;\varkappa) = K_{\eta\zeta}(P,p;\varkappa),$$

$$K_{\zeta\zeta}(P,p;\varkappa) = \frac{2}{2+k}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$
$$= \frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2} + \varkappa\{3\cos^2(r_{pP}, \zeta) - 1\}\frac{\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}^2}$$

werde zunächst das System der inhomogenen linearen Integralgleichungen zur Bestimmung der unbekannten Funktionen $f(p;\varkappa)$, $g(p;\varkappa)$ und $h(p;\varkappa)$

$$
\begin{aligned}
f(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\
+ K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \varrho(p), \\
g(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\
+ K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \sigma(p), \\
h(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\
+ K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \tau(p),
\end{aligned}
\tag{72}
$$

untersucht, wobei wir annehmen, daß $k \neq -2$ ist, und daß die inhomogenen Bestandteile ϱ, σ, τ auf S stetige Funktionen sind.

Ein solches System läßt sich stets auf eine einzige Integralgleichung zurückführen. Man wähle dazu statt des Integrationsgebietes S eine aus drei Exemplaren von S bestehende Fläche $\mathfrak{S}$, die um sie voneinander unterscheiden zu können, mit $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ bezeichnet seien. Ein Punkt p soll $\mathfrak{S}$ angehören, wenn er auf einer der Flächen $S^{(\mu)}$ ($\mu = 1, 2, 3$) liegt. Unter Benutzung der für den Augenblick gebrauchten neuen Bezeichnungen

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \quad \text{statt} \quad \xi,\ \eta,\ \zeta,$$

$$f_1(p;\varkappa),\ f_2(p;\varkappa),\ f_3(p;\varkappa) \quad \text{statt} \quad f(p;\varkappa),\ g(p;\varkappa),\ h(p;\varkappa)$$

und

$$\varrho_1(p),\ \varrho_2(p),\ \varrho_3(p) \quad \text{statt} \quad \varrho(p),\ \sigma(p),\ \tau(p)$$

definiere man auf $\mathfrak{S}$ die beiden Funktionen

$$f^*(p;\varkappa) = f_\mu(p;\varkappa), \qquad \text{falls } p \text{ auf } S^{(\mu)} \text{ liegt } (\mu = 1, 2, 3)$$

und

$$\varrho^*(p) = \varrho_\mu(p), \qquad \text{falls } p \text{ auf } S^{(\mu)} \text{ liegt } (\mu = 1, 2, 3)$$

und außerdem eine Funktion $K(p, q;\varkappa)$ der beiden auf $\mathfrak{S}$ variierenden Veränderlichen p und q durch

$$K(p, q;\varkappa) = K_{\xi_\mu \xi_\nu}(p, q;\varkappa), \quad \text{falls } p \text{ auf } S^{(\mu)} \text{ und } q \text{ auf } S^{(\nu)} \text{ liegt.}$$

Das System (72) kann alsdann durch die einzige Integralgleichung

$$f^*(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p, p';\varkappa)\, f^*(p';\varkappa)\, d\sigma = \varrho^*(p) \tag{73}$$

ersetzt werden, wenn man unter dem auf der linken Seite stehenden Integral naturgemäß

$$\iint_{(\mathfrak{S})} \cdots d\sigma = \iint_{(S^{(1)})} \cdots d\sigma + \iint_{(S^{(2)})} \cdots d\sigma + \iint_{(S^{(3)})} \cdots d\sigma$$

versteht.

Da die Kerne des Integralgleichungssystems (72) wegen (9) für $p' = p$ wie $\frac{1}{r_{p'p}^{2-\lambda}}$ unendlich werden, so erkennt man genau wie in der Potentialtheorie durch Übergang zu den iterierten Kernen, daß man auf (73) die FREDHOLMsche Theorie anwenden kann. Ist die natürliche Zahl m hinreichend groß, so erweisen sich die m-ten iterierten Kerne als auf S stetige Funktionen[35]). Wir können für m insbesondere eine ungerade Zahl wählen.

Wir behaupten nunmehr, daß die FREDHOLMsche Nennerdeterminante $D^{(m)}(\varkappa)$, die in üblicher Weise mit Hilfe der m-ten iterierten Kerne gebildet wird, für $\varkappa = 0$ nicht verschwinden kann, so daß die ganze transzendente Funktion $D^{(m)}(\varkappa)$ sicherlich nicht identisch verschwindet. Da nämlich für $\varrho, \sigma, \tau \equiv 0, 0, 0$ und $\varkappa = 0$ (d. h. $k = 0$) das System (72) in das System der homogenen Integralgleichungen

$$f(p) + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} f(p')\, d\sigma = 0,$$

$$g(p) + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} g(p')\, d\sigma = 0,$$

$$h(p) + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} h(p')\, d\sigma = 0$$

übergeht, so hätte für $D^{(m)}(0) = 0$ die aus einer solchen homogenen Integralgleichung durch m-fache Iteration hervorgehende Integralgleichung eine nicht identisch verschwindende Lösung. Dann muß es aber eine m-te Einheitswurzel ε_μ ($\varepsilon_\mu^m = 1$) und eine nicht identisch verschwindende Funktion $f_1(p)$ derart geben, daß

$$f_1(p) + \frac{\varepsilon_\mu}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} f_1(p')\, d\sigma = 0$$

ist[36]), woraus wieder die Existenz einer nicht identisch verschwindenden Funktion $f_2(p)$ folgt, die der Integralgleichung

$$f_2(p) + \frac{\varepsilon_\mu}{2\pi} \iint_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} f_2(p')\, d\sigma = 0$$

genügt.

[35]) Vgl. hierzu E. GOURSAT, Cours d'analyse III, 3. Aufl., Paris 1923, insbes. S. 362—364 und O. D. KELLOG, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 299—309.

[36]) Vgl. etwa A. KNESER, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Braunschweig 1911. Insbes. S. 213—214.

Für diese Integralgleichung kann man aber unter Benutzung von Sätzen über Potentiale der einfachen Schicht, wie sie bei unseren Voraussetzungen über die Berandung S von SCHAUDER[37]) bewiesen wurden, mit Schlußweisen, die im Rahmen der Potentialtheorie geläufig sind, im Gegensatz zu dem eben Festgestellten zeigen, daß sie weder für $\varepsilon_\mu = 1$ noch für eine beliebige komplexe m-te Einheitswurzel ε_μ eine nichttriviale Lösung besitzen kann[38]), so daß tatsächlich $D^{(m)}(0) \neq 0$ sein muß.

Ist $\varkappa$ keine Nullstelle von $D^{(m)}(\varkappa)$, so lautet unter Benutzung der für nichtbeschränkte Kerne, deren m-te Iterierte stetig sind, gültigen Form der Resolvente[39]) die eindeutig bestimmte Lösung von (72)

$$(74)\qquad f(p;\varkappa) = \frac{F(p;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}, \quad g(p;\varkappa) = \frac{G(p;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}, \quad h(p;\varkappa) = \frac{H(p;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)},$$

wobei die in $\varkappa$ ganzen transzendenten und in p stetigen Funktionen F, G, H den Integralgleichungen

$$\begin{aligned} F(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} &\{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)F(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)G(p';\varkappa) + \\ &+ K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}(\varkappa)\varrho(p), \\ G(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} &\{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)F(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)G(p';\varkappa) + \\ &+ K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}(\varkappa)\sigma(p), \\ H(p;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} &\{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)F(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)G(p';\varkappa) + \\ &+ K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}(\varkappa)\tau(p) \end{aligned} \qquad (75)$$

genügen.

Man kann sich nun davon überzeugen, daß die mit Hilfe von F, G, H für die Punkte $P = (\xi, \eta, \zeta)$ von R gebildeten Funktionen

$$\begin{aligned} u^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} &\{K_{\xi\xi}(P,p';\varkappa)F(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(P,p';\varkappa)G(p';\varkappa) + \\ &+ K_{\xi\zeta}(P,p';\varkappa)H(p';\varkappa)\}\,d\sigma, \\ v^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} &\{K_{\eta\xi}(P,p';\varkappa)F(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(P,p';\varkappa)G(p';\varkappa) + \\ &+ K_{\eta\zeta}(P,p';\varkappa)H(p';\varkappa)\}\,d\sigma, \\ w^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} &\{K_{\zeta\xi}(P,p';\varkappa)F(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(P,p';\varkappa)G(p';\varkappa) + \\ &+ K_{\zeta\zeta}(P,p';\varkappa)H(p;\varkappa)\}\,d\sigma \end{aligned} \qquad (76)$$

[37]) J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]), insbes. S. 635—640.

[38]) Vgl. hierzu A. KNESER, l. c., Anm. [36]), insbes. S. 203—204 und S. 219—222 und O. D. KELLOG, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 309—310.

[39]) Vgl. etwa E. GOURSAT, l. c., Anm. [35]), insbes. S. 382—384.

in R den Gleichungen

$$\Delta u^* + k\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v^* + k\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w^* + k\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \zeta} = 0,$$
$$\vartheta^* = \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v^*}{\partial \eta} + \frac{\partial w^*}{\partial \zeta} \tag{77}$$

genügen und auf S wegen (39), (41) und wegen der bekannten Sprungrelationen für das Potential der Doppelschicht gemäß (75) die Randwerte

$$[u^*]_S = D^{(m)}(\varkappa)\varrho, \quad [v^*]_S = D^{(m)}(\varkappa)\sigma, \quad [w^*]_S = D^{(m)}(\varkappa)\tau \tag{78}$$

annehmen. Mit den Funktionen

$$u_1 = (1+k)\frac{1}{r_{pP}} - \frac{k}{2}\frac{\partial^2 r_{pP}}{\partial \xi^2}, \quad v_1 = -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 r_{pP}}{\partial \xi \partial \eta}, \quad w_1 = -\frac{k}{2}\frac{\partial^2 r_{pP}}{\partial \xi \partial \zeta}$$

bilden nämlich auch folgende Funktionen ein Lösungstripel von (77):

$$u_1' = \frac{\partial u_1}{\partial n_p} = (1+k)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} - \frac{k}{2}\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} - 2\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} - 3\frac{(\xi-\xi_p)^2}{r_{pP}^2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\right\}$$
$$= \left(1+\frac{k}{2}\right)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} - k\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} + \frac{3k}{2}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p},$$

$$v_1' = \frac{\partial v_1}{\partial n_p} = -\frac{k}{2}\left\{-\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \eta}{\partial n_p} - \frac{\eta-\eta_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} - 3\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}}\frac{\eta-\eta_p}{r_{pP}}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\right\}$$
$$= -\frac{k}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial n_p} - \frac{k}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} + \frac{3k}{2}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p},$$

$$w_1' = \frac{\partial w_1}{\partial n_p} = -\frac{k}{2}\left\{-\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \zeta}{\partial n_p} - \frac{\zeta-\zeta_p}{r_{pP}^3}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} - 3\frac{\xi-\xi_p}{r_{pP}}\frac{\zeta-\zeta_p}{r_{pP}}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}\right\}$$
$$= -\frac{k}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \zeta}{\partial n_p} - \frac{k}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \zeta}\frac{\partial \xi}{\partial n_p} + \frac{3k}{2}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}$$

und zugleich mit

$$u_2 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}, \quad v_2 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \eta}, \quad w_2 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \zeta}$$

ist das auch für die Funktionen

$$u_2' = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}, \quad v_2' = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}, \quad w_2' = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \zeta}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}$$

der Fall. Da auch die Funktionen

$$u_3 = \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} - \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}, \quad v_3 = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial n_p}, \quad w_3 = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n_p}$$

ein Lösungssystem darstellen, so gilt das schließlich, wie behauptet, für die Funktionen

$$\begin{aligned} u_1' + \frac{k}{2}u_2' - \frac{k}{2}u_3 &= \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} + \frac{3k}{2}\left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}, \\ v_1' + \frac{k}{2}v_2' - \frac{k}{2}v_3 &= \frac{3k}{2}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}, \\ w_1' - \frac{k}{2}w_2' - \frac{k}{2}w_3 &= \frac{3k}{2}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p}. \end{aligned} \tag{79}$$

Die restlichen Relationen ergeben sich durch zyklische Vertauschung.

Für die durch (76) gegebene Lösung ist

$$\begin{aligned} \vartheta^* &= \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \frac{2}{2+k}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}F(p';\varkappa) + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}G(p';\varkappa) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}H(p';\varkappa)\right\} d\sigma \\ &= \frac{1-\varkappa}{2\pi}\iint_{(S)}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}F(p';\varkappa) + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}G(p';\varkappa) + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}H(p';\varkappa)\right\} d\sigma. \end{aligned} \tag{80}$$

5. Innerhalb von R sind u^*, v^*, w^* beliebig oft nach ξ, η, ζ, $\varkappa$ differenzierbar, so daß die Reihenfolge von aufeinanderfolgenden Differentiationen vertauscht werden kann. Durch i-malige Differentiation von (77) nach $\varkappa$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta\frac{\partial^i u^*}{\partial \varkappa^i} + k\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial^i \vartheta^*}{\partial \varkappa^i} + i\frac{(2+k)^2}{2}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial^{i-1}\vartheta^*}{\partial \varkappa^{i-1}} + \cdots &= 0, \\ \Delta\frac{\partial^i v^*}{\partial \varkappa^i} + k\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial^i \vartheta^*}{\partial \varkappa^i} + i\frac{(2+k)^2}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial^{i-1}\vartheta^*}{\partial \varkappa^{i-1}} + \cdots &= 0, \\ \Delta\frac{\partial^i w^*}{\partial \varkappa^i} + k\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial^i \vartheta^*}{\partial \varkappa^i} + i\frac{(2+k)^2}{2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial^{i-1}\vartheta^*}{\partial \varkappa^{i-1}} + \cdots &= 0, \\ \Delta\frac{\partial^i \vartheta^*}{\partial \varkappa^i} &= 0, \end{aligned} \tag{81}$$

wobei durch die Punkte Glieder gekennzeichnet sind, die Ableitungen von ϑ^* nach $\varkappa$ von niederer als der $(i-1)$-ten Ordnung enthalten.

Für die Randwerte der i-ten Ableitungen von u^*, v^*, w^* findet man

$$(82)\quad \left[\frac{\partial^i u^*}{\partial \varkappa^i}\right]_S = \frac{d^i D^{(m)}(\varkappa)}{d\varkappa^i}\varrho, \quad \left[\frac{\partial^i v^*}{\partial \varkappa^i}\right]_S = \frac{d^i D^{(m)}(\varkappa)}{d\varkappa^i}\sigma, \quad \left[\frac{\partial^i w^*}{\partial \varkappa^i}\right]_S = \frac{d^i D^{(m)}(\varkappa)}{d\varkappa^i}\tau.$$

Denn es ist z. B. innerhalb von R

$$\begin{aligned}(83)\quad \frac{\partial^i u^*(P;\varkappa)}{\partial \varkappa^i} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)}\int\Bigg\{&\Bigg(\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} + \varkappa\left(3\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 - 1\right)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\Bigg)\frac{\partial^i F(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \\ &+ i\left(3\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2 - 1\right)\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\frac{\partial^{i-1} F(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} + \\ &+ 3\varkappa\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\frac{\partial^i G(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \\ &+ 3i\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\frac{\partial^{i-1} G(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} + \\ &+ 3\varkappa\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\frac{\partial^i H(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \\ &+ 3i\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \zeta}\frac{\partial\left(\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\frac{\partial^{i-1} H(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}}\Bigg\} d\sigma,\end{aligned}$$

so daß auf Grund von (39), (40), (41) und (42) und dem Randverhalten des Potentials der Doppelschicht bei Annäherung von P an S

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^i u^*(P;\varkappa)}{\partial \varkappa^i}\right]_S &= \frac{\partial^i F(p;\varkappa)}{\partial \varkappa^i} \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)}\int\Big\{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\frac{\partial^i F(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + i\frac{\partial K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)}{\partial \varkappa}\frac{\partial^{i-1} F(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} + \\ &+ K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\frac{\partial^i G(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + i\frac{\partial K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)}{\partial \varkappa}\frac{\partial^{i-1} G(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} + \\ &+ K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\frac{\partial^i H(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + i\frac{\partial K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)}{\partial \varkappa}\frac{\partial^{i-1} H(p';\varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}}\Big\} d\sigma \\ &= \frac{\partial^i F(p;\varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i}\int\limits_{(S)}\int\{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)F(p';\varkappa) \\ &+ K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)G(p';\varkappa) + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)H(p';\varkappa)\}d\sigma = \frac{d^i D^{(m)}(\varkappa)}{d\varkappa^i}\varrho(p)\end{aligned}$$

sein muß.

6. Nehmen wir nun an, daß der Wert $\varkappa_0 = -1$ ($k = -1$) eine $(t+1)$-fache Nullstelle von $D^{(m)}(\varkappa)$ darstellt, so daß

$$D^{(m)}(\varkappa_0) = \frac{d\,D^{(m)}(\varkappa_0)}{d\varkappa} = \cdots = \frac{d^t D^{(m)}(\varkappa_0)}{d\varkappa^t} = 0, \quad \frac{d^{t+1} D^{(m)}(\varkappa_0)}{d\varkappa^{t+1}} \neq 0 \tag{84}$$

ist und also

$$D^{(m)}(\varkappa) = (\varkappa - \varkappa_0)^{t+1} d(\varkappa) \text{ mit } d(\varkappa_0) \neq 0 \tag{85}$$

gilt.

Da alsdann (76), (77) und (78)

$$\Delta u^*(P; -1) - \frac{\partial \vartheta^*(P; -1)}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v^*(P; -1) - \frac{\partial \vartheta^*(P; -1)}{\partial \eta} = 0,$$

$$\Delta w^*(P; -1) - \frac{\partial \vartheta^*(P; -1)}{\partial \zeta} = 0$$

und

$$[u^*]_S = 0, \quad [v^*]_S = 0, \quad [w^*]_S = 0$$

ergeben, so behaupten wir, daß in R

$$u^*(P; -1) \equiv 0, \quad v^*(P; -1) \equiv 0, \quad w^*(P; -1) \equiv 0$$

sein muß. Zum Beweise dieser Tatsache zeigen wir zunächst, daß die ersten partiellen Ableitungen von u^*, v^*, w^* bei Annäherung des Punktes P an S existieren und stetig sind.

Auf Grund des Hilfssatzes 2 von § 3 und des entsprechenden von Schauder bewiesenen Satzes über das Potential der Doppelschicht (eine Bemerkung, die auch auf die weiteren von § 3 benutzten Hilfssätze zu übertragen ist) genügen die Funktionen $F(p; -1)$, $G(p; -1)$, $H(p; -1)$ wegen (75) einer H-Bedingung mit dem Flächenexponenten λ. Wir wollen annehmen, was man ohne weiteres tun kann, daß kein Vielfaches von $\lambda = 1$ ist. Dann folgt ebenfalls aus (75) nach dem Hilfssatz 3 von § 3, daß dieselben Funktionen für $2\lambda < 1$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten 2λ und für $2\lambda > 1$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten 1 genügen. Im Falle $2\lambda < 1$ fahre man so fort. Die betrachteten drei Funktionen genügen also stets einer H-Bedingung mit dem Exponenten 1. Auf Grund der Hilfssätze 4 und 5 von § 3 existieren dann auf S die Tangentialableitungen

$$\frac{\partial F(p; -1)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial G(p; -1)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H(p; -1)}{\partial t}$$

und erfüllen eine H-Bedingung mit dem Exponenten $\lambda + \mu - 1 - \varepsilon$, wobei man für μ eine beliebige Zahl mit $0 < \mu < 1$ wählen kann, für die $\lambda + \mu > 1$ ist. Nach dem Hilfssatz 6 desselben Paragraphen genügen dann die drei Tangentialableitungen einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Die Hilfssätze 9 und 10 zeigen schließlich, daß die ersten partiellen Ableitungen von $u^*(P; -1)$, $v^*(P; -1)$, $w^*(P; -1)$ bei normaler Annäherung an S gegen

wohlbestimmte Grenzwerte konvergieren. Da diese Konvergenz gleichmäßig ist, so erkennt man, daß die Ableitungen auch in $R + S$ stetig sind[40]).

Nach Satz 1 gibt es dann eine biharmonische Funktion U^* derart, daß

$$u^*(P; -1) = \frac{\partial U^*}{\partial \xi}, \qquad v^*(P; -1) = \frac{\partial U^*}{\partial \eta} \qquad w^*(P; -1) = \frac{\partial U^*}{\partial \zeta}$$

ist.

Versteht man nun unter S_n eine der Flächen, die im Abschnitt 2 dieses Paragraphen definiert wurde, so kann man auf ihr Inneres R_n eine GREENsche Formel in der Gestalt

$$\iiint_{(R_n)} (\Delta U^*)^2 \, d\tau = \iint_{(S_n)} \left\{ U^* \frac{\partial \Delta U^*}{\partial n} - \Delta U^* \frac{\partial U^*}{\partial n} \right\} d\sigma \tag{86}$$

anwenden. Bildet man hierin den Limes für $n \to \infty$, so geht $\iint_{(S_n)} \Delta U^* \frac{\partial U^*}{\partial n} \, d\sigma$ gegen Null, da ΔU^* beschränkt bleibt, während $\frac{\partial U^*}{\partial n}$ gegen Null konvergiert. Bei dem ersten Bestandteil auf der rechten Seite beachte man aber, daß für alle Punkte P auf S_n, deren Abstand von S mit h bezeichnet sei,

$$[U^*]_{S_n} | < \tfrac{1}{2} C h^2 \text{ mit } |D^2 U^*| < C \text{ in } R + S$$

sein muß, da U^* mit seinen partiellen Ableitungen erster Ordnung auf S verschwindet, und die Ableitungen zweiter Ordnung in $R + S$ beschränkt sind. Berücksichtigt man aber, daß ΔU^* eine in $R + S$ stetige harmonische Funktion ist, so hat man nach einem Satz aus der Potentialtheorie[41]) für alle Punkte P von S_n:

$$\left| \left[\frac{\partial \Delta U^*}{\partial n} \right]_{S_n} \right| < 3 \cdot \frac{3}{2} C \frac{1}{h},$$

so daß schließlich

$$\left| \iint_{(S_n)} U^* \frac{\partial \Delta U^*}{\partial n} \, d\sigma \right| < \frac{9}{4} C^2 F_n h_n$$

ist, wenn F_n den Flächeninhalt von S_n und h_n den maximalen Abstand eines auf S_n gelegenen Punktes P_n von S bedeuten.

Da also auch dieser Bestandteil für $n \to \infty$, d. h. $h_n \to 0$ gegen Null geht, so gilt in $R + S$

$$\Delta U^* \equiv 0$$

und da U^* auf S verschwindet, so muß in $R + S$

$$U^* \equiv 0$$

[40]) Für den Beweis dieser Tatsache sei auf M. SULLIVAN, On the derivatives of Newtonian and logarithmic potentials near the acting masses. Transactions of the Am. math. soc. **34** (1932), S. 137—171, insbes. S. 146—147, verwiesen.

[41]) Vgl. O. D. KELLOG, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 227.

und damit auch, wie behauptet,

$$u^*(P; -1) \equiv 0, \quad v^*(P; -1) \equiv 0, \quad w^*(P; -1) \equiv 0$$

sein.

Aus (81) folgt nun für $i = 1$ wegen $\vartheta^*(P; -1) \equiv 0$

$$\Delta \frac{\partial u^*}{\partial \varkappa} + k \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \varkappa}\right) = 0, \quad \Delta \frac{\partial v^*}{\partial \varkappa} + k \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \varkappa}\right) = 0,$$

$$\Delta \frac{\partial w^*}{\partial \varkappa} + k \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial \vartheta^*}{\partial \varkappa}\right) = 0$$

während nach (82) und (84)

$$\left[\frac{\partial u^*}{\partial \varkappa}\right]_S = 0, \quad \left[\frac{\partial v^*}{\partial \varkappa}\right]_S = 0, \quad \left[\frac{\partial w^*}{\partial \varkappa}\right]_S = 0$$

ist. Mit derselben Methode, mit der eben das Verschwinden von u^*, v^*, w^* bewiesen wurde, läßt sich dann zeigen, daß in R

$$\frac{\partial u^*(P; -1)}{\partial \varkappa} \equiv 0, \quad \frac{\partial v^*(P; -1)}{\partial \varkappa} \equiv 0, \quad \frac{\partial w^*(P; -1)}{\partial \varkappa} \equiv 0$$

sein muß. Es ist dazu nur nachzuweisen, daß die partiellen Ableitungen der Funktionen

$$\frac{\partial u^*(P; -1)}{\partial \varkappa}, \quad \frac{\partial v^*(P; -1)}{\partial \varkappa}, \quad \frac{\partial w^*(P; -1)}{\partial \varkappa}$$

nach ξ, η, ζ in $R + S$ stetige Funktionen sind, was ohne weiteres gelingt, wenn man beachtet, daß man neben (83) und entsprechenden Gleichungen für $\frac{\partial^i v^*(P; \varkappa)}{\partial \varkappa^i}$ und $\frac{\partial^i w^*(P; \varkappa)}{\partial \varkappa^i}$ für $\frac{\partial^i F(p; \varkappa)}{\partial \varkappa^i}$ die Funktionalrelation

$$\frac{\partial^i F(p; \varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} + \varkappa \left(3\left(\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi}\right)^2 - 1\right) \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \right) \frac{\partial^i F(p'; \varkappa)}{\partial \varkappa^i} + \right.$$

$$+ i\left(3\left(\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi}\right)^2 - 1\right) \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^{i-1} F(p'; \varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} + 3\varkappa \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^i G(p'; \varkappa)}{\partial \varkappa^i} +$$

$$+ 3i \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^{i-1} G(p'; \varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} + 3\varkappa \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \zeta} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^i H(p'; \varkappa)}{\partial \varkappa^i} +$$

$$\left. + 3i \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi} \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \zeta} \frac{\partial \left(\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}} \frac{\partial^{i-1} H(p'; \varkappa)}{\partial \varkappa^{i-1}} \right\} d\sigma = \frac{\partial^i D^{(m)}(\varkappa)}{d\varkappa^i} \varrho(p)$$

und entsprechende Relationen für $\frac{\partial^i G(p; \varkappa)}{\partial \varkappa^i}$ und $\frac{\partial^i H(p; \varkappa)}{\partial \varkappa^i}$ hat. In dieser Weise erkennt man der Reihe nach für $i = 0, 1, 2, \ldots, t$, daß in R

$$\frac{\partial^i u^*(P; -1)}{\partial \varkappa^i} \equiv 0, \quad \frac{\partial^i v^*(P; -1)}{\partial \varkappa^{i-1}} \equiv 0, \quad \frac{\partial^i w^*(P; -1)}{\partial \varkappa^i} \equiv 0$$

gilt. Daher kann geschrieben werden

$$u^*(P;\varkappa) = (\varkappa+1)^{t+1}u'(P;\varkappa), \quad v^*(P;\varkappa) = (\varkappa+1)^{t+1}v'(P;\varkappa),$$
$$w^*(P;\varkappa) = (\varkappa+1)^{t+1}w'(P;\varkappa).$$

Hierbei besitzen die Funktionen u', v', w' dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie die Funktionen u^*, v^*, w^* und genügen nach (77), (78) und (85) den Gleichungen

$$\Delta u' + k\frac{\partial \vartheta'}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta v' + k\frac{\partial \vartheta'}{\partial \eta} = 0, \quad \Delta w' + k\frac{\partial \vartheta'}{\partial \zeta} = 0,$$
$$\vartheta' = \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{\partial w'}{\partial \zeta},$$
$$[u']_S = d(\varkappa)\varrho, \quad [v']_S = d(\varkappa)\sigma, \quad [w']_S = d(\varkappa)\tau.$$

Daher stellen die Funktionen

$$u(P;-1) = \frac{u^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}, \quad v(P;-1) = \frac{v^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}, \tag{87}$$
$$w(P;-1) = \frac{w^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}$$

stets bei beliebigen stetigen Randfunktionen ϱ, σ, τ eine Lösung von (62), (63) dar, ganz gleich, ob $D^{(m)}(-1)$ ungleich Null ist oder verschwindet. Damit ist also Satz 2 bewiesen.

7. Als Vorbereitung für den Beweis des im Abschnitt 1 dieses Paragraphen genannten Satzes 3, des ebendort erwähnten Eindeutigkeitssatzes, sowie einiger weiterer Sätze bedürfen wir einiger Hilfssätze, von denen wir zunächst den folgenden beweisen: *Genügen in dem Integralgleichungssystem* (75) *mit* $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$ *die Funktionen* $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ *einer H-Bedingung mit dem Exponenten* μ, *so erfüllen auch die Lösungsfunktionen* $F(p;\varkappa), G(p;\varkappa), H(p;\varkappa)$ *eine H-Bedingung mit dem Exponenten* μ.

Beweis[42]). Wir nehmen zunächst an, daß kein Vielfaches von λ gleich 1 ist. Da nach (75) die Lösungsfunktionen stetig sind, so genügen die in diesen Gleichungen auftretenden Integrale nach Hilfssatz 2 von § 3 einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ, so daß wiederum nach (75) die Lösungsfunktionen eine H-Bedingung mit dem Exponenten $\mathrm{Min}(\lambda, \mu)$ erfüllen. Für $\mu \leqq \lambda$ ist also der Hilfssatz bewiesen. Ist aber $\mu > \lambda$, so genügen die Lösungsfunktionen zunächst einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ und demgemäß die Integrale in (75) nach Hilfssatz 3 von § 3 einer H-Bedingung mit dem Exponenten

$$\begin{cases} 2\lambda, & \text{falls } 2\lambda < 1 \\ 1, & \text{falls } 2\lambda > 1 \end{cases}$$

ist (der Fall $2\lambda = 1$ ist ja ausgeschlossen worden).

[42]) Er verläuft wörtlich genau, wie der Beweis des entsprechenden Satzes in der Potentialtheorie bei J. SCHAUDER, l. c., Anm. [14]).

Für $2\lambda > 1$ folgt also aus (75), daß die Lösungsfunktionen einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen. Im Falle $2\lambda < 1$ ist die Behauptung ebenso für $\mu \leqq 2\lambda$ erwiesen. Ist aber $\mu > 2\lambda$, so gehe man entsprechend einen Schritt weiter. Man muß nach mindestens n Schritten zum Ziele kommen, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet, für die $n \cdot \lambda > 1$ ist.

8. Aus dem eben bewiesenen Hilfssatz ergibt sich unmittelbar der folgende

Hilfssatz: *Genügen die Randfunktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ, und ist $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$, so erfüllen die gemäß* (75) *und* (76) *dazugehörigen Lösungsfunktionen*

$$u(P;\varkappa) = \frac{u^*(P;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}, \quad v(P;\varkappa) = \frac{v^*(P;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}, \quad w(P;\varkappa) = \frac{w^*(P;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}$$

von (69), (70) *in $R+S$ eine H-Bedingung mit demselben Exponenten μ.*

Beweis. Auf Grund des eben bewiesenen Hilfssatzes genügen nämlich die durch (75) gegebenen Belegungsfunktionen $F(p;\varkappa)$, $G(p;\varkappa)$, $H(p;\varkappa)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ. Dann folgt aber unmittelbar nach Hilfssatz 11 von § 3, daß die durch (76) gegebenen Funktionen $u^*(P;\varkappa)$, $v^*(P;\varkappa)$, $w^*(P;\varkappa)$ und damit auch die Funktionen $u(P;\varkappa)$, $v(P;\varkappa)$, $w(P;\varkappa)$ in $R+S$ eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ erfüllen.

9. Weiter wollen wir den Hilfssatz beweisen: *Genügen die Randfunktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ, so erfüllen die durch* (87) *gegebenen Lösungsfunktionen*

$$u(P;-1) = \frac{u^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}, \quad v(P;-1) = \frac{v^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)},$$

$$w(P;-1) = \frac{w^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}$$

von (62), (63) *in $R+S$ eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ.*

Beweis. Für $D^{(m)}(-1) \neq 0$ liegt nur der eben bewiesene Hilfssatz für $\varkappa = -1$ vor. Sei also $D^{(m)}(-1)$ gleich Null. Bezeichnet P einen beliebigen Punkt von R, so ist

$$u(P;\varkappa) = \frac{u^*(P;\varkappa)}{D^{(m)}(\varkappa)}$$

in einer gewissen in der komplexen $\varkappa$-Ebene gelegenen Umgebung von $\varkappa = -1$ analytisch. Als eine solche Umgebung kann gleichmäßig für alle P aus R die Kreisscheibe

$$|\varkappa + 1| < r$$

gewählt werden, bei der r die Entfernung der nächsten an $\varkappa = -1$ gelegenen komplexwertigen Nullstelle von $D^{(m)}(\varkappa)$ ist. Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte aus R, so besitzt die Funktion

$$u_{12}(\varkappa) = u(P_1;\varkappa) - u(P_2;\varkappa)$$

dieselbe Regularitätseigenschaft. In der Kreisscheibe

$$|\varkappa + 1| \leqq \varrho = \frac{r}{2}$$

der komplexen $\varkappa$-Ebene ist alsdann die Funktion $u_{12}(\varkappa)$ regulär analytisch und $D^{(m)}(\varkappa)$ verschwindet nur bei $\varkappa = -1$. Es läßt sich also für $u_{12}(-1)$ nach der Cauchyschen Integralformel

$$u_{12}(-1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u_{12}(\varkappa)}{\varkappa + 1} d\varkappa$$

schreiben, wobei das Integral über den Kreis $|\varkappa + 1| = \varrho$ der $\varkappa$-Ebene erstreckt wird. Versteht man unter M das Maximum von $|u_{12}(\varkappa)|$ auf diesem Kreise, so gilt also die Abschätzung

$$|u_{12}(-1)| = |u(P_1; -1) - u(P_2; -1)| \leqq \frac{1}{2\pi} 2\pi\varrho \frac{1}{\varrho} M = M.$$

Dehnt man nunmehr die Überlegungen, die zum Hilfssatz 8 geführt haben, auf die komplexen $\varkappa$-Werte mit $|\varkappa + 1| = \varrho$ aus, für die ja $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$ ist, so muß

$$\operatorname{Max}\{|u(P_1; \varkappa) - u(P_2; \varkappa)|\} \leqq K B r^{\mu}_{P_1 P_2}$$
$$(|\varkappa + 1| = \varrho)$$

sein. Die Konstante B ist hierbei zugleich mit ϱ von der Lage der Punkte P_1, P_2 unabhängig. Aus dem letzten Ergebnis folgt dann aber, wie behauptet,

$$|u(P_1; -1) - u(P_2; -1)| \leqq K B r^{\mu}_{P_1 P_2}.$$

10. Weiter gilt folgender Hilfssatz. *Besitzen in dem Integralgleichungssystem* (75) *mit* $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$ *die Funktionen* $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ *Tangentialableitungen, die einer H-Bedingung mit dem Exponenten* $\mu \leqq \lambda$ *genügen, so besitzen die eindeutig bestimmten Lösungsfunktionen* $F(p; \varkappa)$, $G(p; \varkappa)$, $H(p; \varkappa)$ *Tangentialableitungen, die der gleichen H-Bedingung genügen.*

Beweis[43]). Da ϱ, σ, τ Tangentialableitungen besitzen, so erfüllen sie eine H-Bedingung mit einem beliebigen Exponenten $\mu_0 < 1$. Nach dem Hilfssatz 7 dieses Paragraphen genügen dann auch wegen (75) die Funktionen $F(P; \varkappa), G(p; \varkappa), H(p; \varkappa)$ ebenfalls einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ_0. Man wähle μ_0 so groß, daß $\mu_0 + \lambda > 1$ ist. Nach Hilfssatz 4 und 5 von § 3 existieren dann die Tangentialableitungen der in (75) vorkommenden Integrale und genügen einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\lambda + \mu_0 - 1$. Aus (75) folgt dann aber wieder, daß die Tangentialableitungen von $F(p; \varkappa)$, $G(p; \varkappa)$, $H(p; \varkappa)$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\varepsilon = \operatorname{Min}(\mu, \lambda + \mu_0 - 1)$ genügen. Nach dem Hilfssatz 6 von § 3 erfüllen dann aber die Tangential-

[43]) Er verläuft wörtlich genau wie der Beweis des entsprechenden Satzes in der Potentialtheorie bei J. Schauder, l. c., Anm. [14]).

ableitungen der Integrale in (75) eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Damit folgt dann schließlich aus (75), daß $F(p;\varkappa), G(p;\varkappa), H(p;\varkappa)$ Tangentialableitungen besitzen, die einer H-Bedingung mit dem Exponenten $\mu = \mathrm{Min}(\mu, \lambda)$ genügen.

11. Mit dem eben erhaltenen Ergebnis können wir alsdann den im ersten Abschnitt dieses Paragraphen angegebenen Satz 3 beweisen, nach dem die durch (87) gegebenen Lösungsfunktionen

$$u(P;-1) = \frac{u^*(P;-1)}{D^{(m)}(\quad 1)}, \qquad v(P;-1) = \frac{v^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)},$$

$$w(P;-1) = \frac{w^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}$$

von (62), (63) in $R+S$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben, falls die Randfunktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen.

Da nämlich alsdann die Randfunktionen nach der Bemerkung am Ende von § 1 auch Tangentialableitungen besitzen, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so ist dieser Satz für $D^{(m)}(-1) \neq 0$ eine unmittelbare Folge des Hilfssatzes 10 dieses Paragraphen und der Hilfssätze 9 und 10 von § 3. Schreibt man aber im Falle $D^{(m)}(-1) = 0$ ähnlich wie im Abschnitt 9 dieses Paragraphen,

$$u(P;-1) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{u(P;\varkappa)}{\varkappa+1}\,d\varkappa,$$

wobei das Integral über einen von P unabhängigen Kreis in der komplexen $\varkappa$-Ebene, auf dem $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$ ist, erstreckt wird [und entsprechend für $v(P;-1)$, $w(P;-1)$], so erkennt man auf Grund derselben Hilfssätze, daß auch in diesem Fall die ersten partiellen Ableitungen der angegebenen Lösungsfunktionen in $R+S$ stetig sind.

12. Wir sind nunmehr in der Lage, den bereits im ersten Abschnitt angekündigten Eindeutigkeitssatz unter folgenden allgemeinen Voraussetzungen zu beweisen:

Satz 4. *Werden die Funktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ auf S lediglich als stetig vorausgesetzt, so kann es (bis auf eine additive Konstante) höchstens eine in R biharmonische Funktion U geben, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R+S$ stetig sind und bei Annäherung an S bzw. gegen die Funktionen ϱ, σ, τ konvergieren.*

Beweis. Sei U eine beliebige derartige biharmonische Funktion. Ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung besitzen auf den im Abschnitt 2 dieses Paragraphen konstruierten Flächen S_n stetig variierende Randfunktionen $\varrho_{(n)}$, $\sigma_{(n)}$, $\tau_{(n)}$, die außerdem sicherlich Tangentialableitungen aufweisen, die einer H-Bedingung mit einem beliebigen Exponenten $\mu < 1$ genügen.

Zu diesen Randfunktionen konstruiere man nun die zu (87) analogen Funktionen

$$u_{(n)}(P;-1)=\frac{u^*_{(n)}(P;-1)}{D^{(m)}_{(n)}(-1)},\qquad v_{(n)}(P;-1)=\frac{v^*_{(n)}(P;-1)}{D^{(m)}_{(n)}(-1)},$$

$$w_{(n)}(P;-1)=\frac{w^*_{(n)}(P;-1)}{D^{(m)}_{(n)}(-1)}, \tag{88}$$

die nach den Aussagen von Satz 1 bis 3 die Lösung der biharmonischen Randwertaufgabe für R_n+S_n darstellen. Da nach Satz 3 die ersten partiellen Ableitungen dieser Funktionen in R_n+S_n als stetige Funktionen existieren, so folgt aus Überlegungen, wie sie im Abschnitt 6 dieses Paragraphen angestellt wurden, daß in R_n

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}\equiv u_{(n)}(P;-1),\qquad \frac{\partial U}{\partial \eta}\equiv v_{(n)}(P;-1),\qquad \frac{\partial U}{\partial \zeta}\equiv w_{(n)}(P;-1)$$

sein muß.

Beachtet man nun, daß sich für die die Fredholmschen Determinanten darstellenden unendlichen Reihen bei Benutzung des Hadamardschen Determinantensatzes konvergente von n unabhängige Majoranten angeben lassen, so bestehen für $n\to\infty$ die folgenden Limesrelationen

$$\lim_{n\to\infty} D^{(m)}_{(n)}(\varkappa)=D^{(m)}(\varkappa),$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{(n)}(P;\varkappa)=F(P;\varkappa),\qquad \lim_{n\to\infty} G_{(n)}(P;\varkappa)=G(P;\varkappa),$$

$$\lim_{n\to\infty} H_{(n)}(P;\varkappa)=H(P;\varkappa).$$

Ist nun $D^{(m)}(-1)\neq 0$, so ist von einem gewissen n ab auch $D^{(m)}_{(n)}(-1)\neq 0$, und es ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} u_{(n)}(P;-1)=\frac{u^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)},\qquad \lim_{n\to\infty} v_{(n)}(P;-1)=\frac{v^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)},$$

$$\lim_{n\to\infty} w_{(n)}(P;-1)=\frac{w^*(P;-1)}{D^{(m)}(-1)}. \tag{89}$$

Im Falle $D^{(m)}(-1)=0$ gehe man von dem Satz aus, daß die Folge $D^{(m)}_{(n)}(\varkappa)$ in jedem ganz im Endlichen gelegenen Gebiet der komplexen $\varkappa$-Ebene gleichmäßig gegen $D^{(m)}(\varkappa)$ konvergiert. Es ist nämlich $D^{(m)}_{(n)}(\varkappa)$ als Fredholmsche Determinante eine unendliche Reihe der Gestalt

$$D^{(m)}_{(n)}(\varkappa)=\sum_{\varrho=1}^{\infty} d_{n\varrho}(\varkappa)\qquad (n=1,2,\ldots),$$

deren Elemente bei Benutzung des Hadamardschen Determinantensatzes sich in der Form

$$|d_{n\varrho}(\varkappa)|\leqq c_\varrho$$

abschätzen lassen, wobei c_ϱ von n und dem in dem endlichen Gebiet der $\varkappa$-Ebene gelegenen $\varkappa$ unabhängig ist, und die Reihe $\sum_{\varrho=1}^{\infty} c_\varrho$ konvergiert. Wählt man alsdann bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_1 und die natürliche Zahl n so groß, daß

$$1. \qquad \sum_{\varrho=n_1+1}^{\infty} c_\varrho < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist, womit also n_1 festgelegt wird, und daß

$$2. \qquad \sum_{\varrho=1}^{n_1} |d_{n\varrho}(\varkappa) - d_\varrho(\varkappa)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

mit

$$d_\varrho(\varkappa) = \lim_{n \to \infty} d_{n\varrho}(\varkappa)$$

gilt, so gewinnt man die Abschätzung

$$|D_{(n)}^{(m)}(\varkappa) - D^{(m)}(\varkappa)|$$

$$\leqq |D_{(n)}^{(m)}(\varkappa) - \sum_{\varrho=1}^{n_1} d_{n\varrho}(\varkappa)| + |\sum_{\varrho=1}^{n_1} d_{n\varrho}(\varkappa) - \sum_{\varrho=1}^{n_1} d_\varrho(\varkappa)| + |\sum_{\varrho=1}^{n_1} d_\varrho(\varkappa) - D^{(m)}(\varkappa)|$$

$$\leqq \sum_{\varrho=n_1+1}^{\infty} |d_{n\varrho}(\varkappa)| + \sum_{\varrho=1}^{n_1} |d_{n\varrho}(\varkappa) - d_\varrho(\varkappa)| + \sum_{\varrho=n_1+1}^{\infty} |d_\varrho(\varkappa)|$$

$$\leqq 2 \sum_{\varrho=n_1+1}^{\infty} c_\varrho + \sum_{\varrho=1}^{n_1} |d_{n\varrho}(\varkappa) - d_\varrho(\varkappa)| < \varepsilon,$$

die die Behauptung beweist. Ist dann auf der Berandung eines in der $\varkappa$-Ebene gelegenen Kreises um den Punkt $\varkappa = -1$ durchweg $D^{(m)}(\varkappa) \neq 0$, so gilt das wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz auch von einem gewissen n ab für die Funktionen $D_{(n)}^{(m)}(\varkappa)$. Schreibt man also mit einem über einen solchen Kreis erstreckten Integral

$$u_{(n)}(P; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u_{(n)}(P; \varkappa)}{\varkappa + 1} \, d\varkappa$$

und entsprechende Ausdrücke für $v_n(P; -1)$, $w_n(P; -1)$, so erkennt man, daß die Limesrelationen (89) auch im Falle $D^{(m)}(-1) = 0$ gelten.

Damit ist also gezeigt, daß jede Lösung die Gestalt (87) haben muß, so daß es höchstens eine Lösung geben kann.

13. Mit Hilfe des eben bewiesenen Eindeutigkeitssatzes können wir nunmehr folgenden Satz aussprechen, der für eine anschließende, bereits in der Einleitung erwähnte Arbeit des Verfassers von Wichtigkeit sein wird.

Satz 5. *Nehmen die ersten partiellen Ableitungen der in R biharmonischen Funktion U bei Annäherung an S die Randfunktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ an, die*

einer H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen, so erfüllen auch die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

in $R + S$ eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 4 und dem in Abschnitt 9 bewiesenen Hilfssatz.

14. Unter einem regulären Oberflächenelement E verstehe man bei Zugrundelegung eines rechtwinklig kartesischen Bezugssystems eine räumliche Punktmenge von Punkten (x, y, z), für deren z-Koordinate bei geeigneter Orientierung der Koordinatenachsen

$$z = \varphi(x, y)$$

gilt, wobei $\varphi(x, y)$ eindeutig ist und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung in einem ebenen Gebiet G der x, y-Ebene besitzt, das von einer endlichen Anzahl von aneinander schließenden, durch eine einmal stetig differenzierbare Parameterdarstellung gegebenen doppelpunktfreien Kurvenbogen begrenzt wird. Unter Benutzung dieser Definition beschließen wir diesen Paragraphen mit dem folgenden

Satz 6. *R sei ein beschränktes, offenes Kontinuum, dessen Berandung S ein reguläres Oberflächenelement E mit den folgenden Eigenschaften enthalte:*

(a) *Der Winkel, den zwei Normalen von E miteinander einschließen, sei stets kleiner als 60^0.*

(b) *In einem Koordinatensystem, dessen Achsen in einem beliebigen Punkte p von E tangential bzw. normal zu E seien, lasse sich E durch eine Funktion*

$$z = \varphi(x, y)$$

darstellen, die eindeutig ist und stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hinsichtlich x und y besitzt, die einer in p gleichmäßigen H-Bedingung (Exponent λ) genügen.

(c) *Zu jedem regulären Oberflächenelement E', das im Innern von E enthalten ist, gebe es eine positive Zahl a_1 derart, daß eine Kugel mit dem Radius a_1 um irgendeinen Punkt von E' von S nur Punkte enthält, die gleichzeitig E angehören (diese Voraussetzung soll mehrfache Randpunkte ausschließen). Die Funktion $U(\xi, \eta, \zeta)$ sei in R eindeutig und biharmonisch, in $R + S$ sei sie mit ihren ersten partiellen Ableitungen stetig, wobei die letzteren bei Annäherung an S gegen Randfunktionen $\varrho(p), \sigma(p), \tau(p)$ konvergieren, die auf E einer gleichmäßigen H-Bedingung (Exponent μ) genügen.*

Es wird dann behauptet, daß es ein Gebiet R' gibt, welches alle Punkte von R in einer gewissen Nachbarschaft von E' enthält, so daß in $R' + E'$ die Funktionen $\frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}, \frac{\partial U}{\partial \zeta}$ einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen.

Dem Beweise dieses Satzes schicken wir zunächst einen Hilfssatz voraus.

15. *Es gibt ein reguläres Oberflächenelement E'', das ganz in E enthalten ist, und das E' in seinem Innern enthält, von der Eigenschaft, daß es durch ein ganz in R liegendes Flächenstück zu einer einfachen geschlossenen Fläche $\overline{S}$ ergänzt werden kann, die durchweg den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt.*

Beweis. Die Einheitsvektoren des x, y, z-Systems in einem Punkte p von E seien mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ bezeichnet. Man wähle eine einfache geschlossene, im Innern von E, aber im Äußeren von E' gelegene Kurve C, die etwa durch den auf p bezogenen Ortsvektor in der Form

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s) = x(s)\,\mathfrak{e}_1 + y(s)\,\mathfrak{e}_2 + z(s)\,\mathfrak{e}_3 \qquad (0 \leqq s \leqq s_0)$$

gegeben sei, wobei angenommen werden soll, daß die drei Funktionen $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ zweimal stetig nach s differenzierbar sind, und die zweiten Ableitungen außerdem einer in s gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen. Solche Kurven gibt es sicherlich auf E[44]). Das von C begrenzte reguläre Oberflächenelement heiße E''.

Zu E'' konstruiere man nun das Parallelflächenstück E_h'' im Abstand h, das durch

$$x_h = x + h\cos(n,x) = x - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{1}{\omega}h,$$

$$y_h = y + h\cos(n,y) = y - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{1}{\omega}h, \qquad \left(\omega = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}\right)$$

$$z_h = z + h\cos(n,z) = z + \frac{1}{\omega}h,$$

gegeben ist, wenn der Punkt (x, y, z) auf E'' liegt. Wir nehmen h so klein (h wird im folgenden noch weiter eingeschränkt werden), daß sich die Normalenstücke zwischen $E'' + C$ und $E_h'' + C_h$ nicht schneiden, und daß E_h'' ganz in R liegt, was bei Beachtung der Voraussetzung (c) über E stets möglich ist. Wegen der Voraussetzungen über S besitzt E_h'', wenn es als Teilstück von $\overline{S}$ gewählt wird, offenbar die verlangten Eigenschaften.

Die beiden Flächenstücke E'' und E_h'' ergänze man nun in folgender Weise zu einer geschlossenen Fläche. In einem beliebigen Punkte von C, dem etwa

[44]) Vgl. hierzu O. D. Kellog, l. c., Anm. [27]), insbes. S. 318—319.

der Parameter s entspreche, und der kurz als der Punkt s auf C bezeichnet werde, wähle man das durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1(s)$, $\mathfrak{e}_2(s)$, $\mathfrak{e}_3(s)$ charakterisierte Tangential-Normalkoordinatensystem (die diesbezüglichen Koordinaten seien mit $\xi^{(s)}$, $\eta^{(s)}$), $\zeta^{(s)}$ bezeichnet), bei dem $\mathfrak{e}_3(s)$ mit dem Flächennormalenvektor $\mathfrak{n}(s)$ ($|\mathfrak{n}(s)| = 1$) und $\mathfrak{e}_2(s)$ mit dem Tangentenvektor $\mathfrak{t}(s)$ ($|\mathfrak{t}(s)| = 1$) an C identisch sind. Den Punkt s auf C und den auf der Flächennormalen in s gelegenen Punkt mit den Koordinaten

$$\xi^{(s)} = 0, \quad \eta^{(s)} = 0, \quad \zeta^{(s)} = h$$

verbinde man durch den in der von $\mathfrak{e}_1(s)$ und $\mathfrak{e}_3(s)$ aufgespannten Ebene gelegenen Kurvenbogen $C^{(s)}$, der die Parameterdarstellung

$$\xi^{(s)}(\alpha) = \tau \frac{h}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{h}\right), \qquad \zeta^{(s)}(\alpha) = \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right), \tag{90}$$

$$-\frac{\pi}{2} h \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2} h$$

besitzt, wobei τ eine positive Zahl sei, über die noch verfügt wird. Die Fläche, die aus allen $C^{(s)}$ ($0 \leqq s \leqq s_0$) besteht, werde mit $F_{h,\tau}$ bezeichnet. Wir behaupten, daß bei hinreichend kleinem h und τ die Fläche $E'' + F_{h,\tau} + E_h''$ einfach geschlossen ist und den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt, wobei $F_{h,\tau} + E_h''$ abgesehen von der Randkurve C ganz in R liegt.

Es ist dazu nur noch zu zeigen, daß $F_{h,\tau}$ bei hinreichend kleinem h und τ einfach ist, den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt und abgesehen von C ganz in R liegt. $F_{h,\tau}$ ist in Vektoren durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \mathfrak{x}(s, \alpha) = x(s, \alpha)\,\mathfrak{e}_1 + y(s, \alpha)\,\mathfrak{e}_2 + z(s, \alpha)\,\mathfrak{e}_3 \\ &= \mathfrak{x}(s) + \xi^{(s)}(\alpha)\,\mathfrak{e}_1(s) + \zeta^{(s)}(\alpha)\,\mathfrak{e}_3(s) \\ &= x(s)\,\mathfrak{e}_1 + y(s)\,\mathfrak{e}_2 + z(s)\,\mathfrak{e}_3 + \\ &\quad + \xi^{(s)}(\alpha)\,\mathfrak{e}_1(s) + \zeta^{(s)}(\alpha)\,\mathfrak{e}_3(s) \end{aligned} \tag{91}$$

oder in Koordinaten durch

$$\begin{aligned} x &= x(s, \alpha) = x(s) + \xi^{(s)}(\alpha) \cos(\mathfrak{e}_1(s), \mathfrak{e}_1) + \zeta^{(s)}(\alpha) \cos(\mathfrak{e}_3(s), \mathfrak{e}_1), \\ y &= y(s, \alpha) = y(s) + \xi^{(s)}(\alpha) \cos(\mathfrak{e}_1(s), \mathfrak{e}_2) + \zeta^{(s)}(\alpha) \cos(\mathfrak{e}_3(s), \mathfrak{e}_2), \\ z &= z(s, \alpha) = z(s) + \xi^{(s)}(\alpha) \cos(\mathfrak{e}_1(s), \mathfrak{e}_3) + \zeta^{(s)}(\alpha) \cos(\mathfrak{e}_3(s), \mathfrak{e}_3) \end{aligned} \tag{92}$$

gegeben. Beachtet man nun, daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1(s) &= \mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s), \\ \mathfrak{e}_3(s) &= \mathfrak{n}(s), \\ \mathfrak{t}(s) &= \mathfrak{x}'(s) = x'(s)\mathfrak{e}_1 + y'(s)\mathfrak{e}_2 + z'(s)\mathfrak{e}_3 \end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{n}(s) = -\frac{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_s}{\omega(s)}\,\mathfrak{e}_1 - \frac{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_s}{\omega(s)}\,\mathfrak{e}_2 + \frac{1}{\omega(s)}\,\mathfrak{e}_3$$

ist, so kann für (91) und (92) bei Beachtung von (90) ausführlicher

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s,\alpha) = \mathfrak{x}(s) + \tau\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s) + \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\mathfrak{n}(s)$$

und

$$x = x(s,\alpha) = x(s) + \tau\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{1}{\omega(s)}\begin{vmatrix} y'(s), & z'(s) \\ -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_s, & 1 \end{vmatrix} - \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\frac{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_s}{\omega(s)},$$

$$y = y(s,\alpha) = y(s) - \tau\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{1}{\omega(s)}\begin{vmatrix} x'(s), & z'(s) \\ -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_s, & 1 \end{vmatrix} - \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\frac{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_s}{\omega(s)},$$

$$z = z(s,\alpha) = z(s) + \tau\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{1}{\omega(s)}\begin{vmatrix} x'(s), & y'(s) \\ -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_s, & -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_s \end{vmatrix} + \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\frac{1}{\omega(s)}$$

geschrieben werden. Man sieht, daß die drei Funktionen $x(s,\alpha)$, $y(s,\alpha)$, $z(s,\alpha)$ als Funktionen von s und α einmal stetig differenzierbar sind und die partiellen Ableitungen einer in $s\,(0 \leqq s \leqq s_0)$ und $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}h \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}h\right)$ gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen.

Die Fläche $F_{h,\tau}$ läßt sich dann für jedes in einem Punkte (s,α) gelegene Tangential-Normalkoordinatensystem x, y, z im Kleinen durch eine Funktion $z = \varphi(x,y)$ mit den gewünschten Eigenschaften eindeutig darstellen, wenn gezeigt werden kann, daß die Vektoren $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}$ und $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\alpha}$ stets linear unabhängig sind. Nun ist

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s} = \mathfrak{t}(s) + \tau\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{d}{ds}\left(\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s)\right) + \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\alpha} = -\frac{\tau}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\mathfrak{n}(s)$$

Für keinen Parameterwert s mit $0 \leqq s \leqq s_0$ und α mit

$$-\frac{\pi}{2}h \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}h$$

ist der Vektor $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\alpha}$ für $\tau > 0$ gleich dem Nullvektor. Die Vektoren $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s}$ und $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\alpha}$ sind sodann sicher linear unabhängig, wenn h so klein gewählt wird, daß

erstens $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}$ $(0 \leqq s \leqq s_0)$ nicht gleich dem Nullvektor ist — das ist ja wegen

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}\right| \geqq 1 - h\left|\frac{\tau}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{d}{ds}(\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s)) + \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds}\right|$$

stets möglich — und daß zweitens $\left|\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} - \mathfrak{t}(s)\right|$ so klein ist, daß $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}$ $(0 \leqq s \leqq s_0)$ niemals der von $\mathfrak{n}(s)$ und $\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s)$ aufgespannten Ebene angehört.

Wird die Bogenlänge auf den Kurven $\alpha = \text{konst.}$ mit s_α und die Bogenlänge auf den Kurven $s = \text{konst.}$ mit σ_s bezeichnet, wobei also

$$\frac{ds_\alpha}{ds} = \sqrt{\left(\mathfrak{t}(s) + \tau\frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right)\frac{d}{ds}(\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s)) + \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right)+1\right)\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds}\right)^2}$$

und

$$\frac{d\sigma_s}{d\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{h}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{h}\right)}$$

gilt, so zeigt sich weiter, daß die ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial \mathfrak{x}(s,\alpha)}{\partial s_\alpha}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}(s,\alpha)}{\partial \sigma_s}$ die jeweils für $\alpha = \text{konst.}$ bzw. $s = \text{konst.}$ zu bilden sind, bei Annäherung des Punktes (s,α) an einen Punkt $\left(s, -\frac{\pi}{2}h\right)$ bzw. $\left(s, \frac{\pi}{2}h\right)$ der Randkurve C von E'' bzw. der Randkurve C_h von E_h'' gegen die entsprechenden Werte der Ableitungen konvergieren, die sich bei Annäherung an dieselben Randpunkte auf E'' bzw. E_h'' ergeben. Dazu beachte man, daß $\mathfrak{n}(s)$ auch Normalvektor von E_h'' ist, und daß

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s_\alpha}\right]_{\alpha=-\frac{\pi}{2}h} = \left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}\frac{ds}{ds_\alpha}\right]_{\alpha=-\frac{\pi}{2}h} = \mathfrak{t}(s),$$

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s_\alpha}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}h} = \left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}\frac{ds}{ds_\alpha}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}h} = \frac{\mathfrak{t}(s)+h\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds}}{\sqrt{\left(\mathfrak{t}(s)+h\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds}\right)^2}},$$

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \sigma_s}\right]_{\alpha=-\frac{\pi}{2}h} = \left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{d\sigma_s}\right]_{\alpha=-\frac{\pi}{2}h} = \mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s),$$

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \sigma_s}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}h} = \left[\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{d\sigma_s}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{2}h} = -\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s)$$

ist.

Weiter werde gezeigt, daß sich dieses Flächenstück, wenn nur h und τ klein genug gewählt werden, nicht selbst überschneiden kann. Zum Beweise gehen wir von der Bemerkung aus, daß die durch

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s,n,r) = \mathfrak{x}(s) + n\,\mathfrak{n}(s) + r\,\mathfrak{t}(s)\times\mathfrak{n}(s)$$

gegebene, einmal stetig nach s, n, r partiell differenzierbare, dreiparametrige Vektormannigfaltigkeit im kleinen eineindeutig auf die Parameter s, n, r

bezogen ist, da die Kolonnen der Funktionalmatrix aus den Komponenten der Vektoren

$$\mathfrak{t}(s) + n\frac{d\,\mathfrak{n}(s)}{ds} + r\frac{d}{ds}\left(\mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)\right),\ \mathfrak{n}(s),\ \mathfrak{t}(s) \times \mathfrak{n}(s)$$

bestehen und diese Vektoren bei hinreichend kleinem h und r_0 für alle s, n, r mit $0 \leqq s \leqq s_0$, $0 \leqq n \leqq h$, $0 \leqq r \leqq r_0$ linear unabhängig sind. Wir denken uns h, das den bereits genannten Einschränkungen genügt, und r_0 so gewählt, daß die letztere Voraussetzung zutrifft. Wir betrachten dann nur solche τ-Werte, für die $\tau\frac{h}{2} \leqq r_0$ ist. Würde nun für die Folgen $h_\nu \to 0$, $\tau_\nu \to 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ stets eine Überschneidung der Fläche eintreten, so würde es auf C zwei Punktfolgen $P_\nu^{(1)}$ und $P_\nu^{(2)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mit den zugehörigen Parametern $s_\nu^{(1)}$ und $s_\nu^{(2)}$ so geben, daß die Kurvenbogen $C^{(s_\nu^{(1)})}$ und $C^{(s_\nu^{(2)})}$ stets einen Schnittpunkt haben. Die Folge $P_\nu^{(1)}$ muß mindestens einen Häufungspunkt haben, den wir etwa $P^{(1)}$ nennen. Ebenso muß es für die Folge $P_\nu^{(2)}$ mindestens einen Häufungspunkt $P^{(2)}$ geben. Wegen $h_\nu \to 0$, $\tau_\nu \to 0$ muß $P^{(1)} = P^{(2)}$ sein. Da die Kurve C nach Voraussetzung einfach ist, gilt für die zugehörigen Parameterwerte $s^{(1)} = s^{(2)}$. Es gibt nun Teilfolgen $P_\nu^{(1)}$ und $P_\nu^{(2)}$ von $P_\nu^{(1)}$ bzw. $P_\nu^{(2)}$, die gegen $P^{(1)}$ konvergieren derart, daß $C^{(s_\nu^{(1)})}$ und $C^{(s_\nu^{(2)})}$ jeweils einen Schnittpunkt haben. Dazu müßte es aber Parameterwerte $s_\nu^{(1)}$, $s_\nu^{(2)}$, $n_\nu^{(1)}$, $n_\nu^{(2)}$, $r_\nu^{(1)}$ und $r_\nu^{(2)}$ mit

$$s_\nu^{(1)} \to s^{(1)},\quad s_\nu^{(2)} \to s^{(1)},\quad n_\nu^{(1)} \to 0,\quad n_\nu^{(2)} \to 0,\quad r_\nu^{(1)} \to 0,\quad r_\nu^{(2)} \to 0$$

geben, für die

$$\begin{aligned}&\mathfrak{x}(s_\nu^{(1)}) + n_\nu^{(1)}\mathfrak{n}(s_\nu^{(1)}) + r_\nu^{(1)}\mathfrak{t}(s_\nu^{(1)}) \times \mathfrak{n}(s_\nu^{(1)})\\ &= \mathfrak{x}(s_\nu^{(2)}) + n_\nu^{(2)}\mathfrak{n}(s_\nu^{(2)}) + r_\nu^{(2)}\mathfrak{t}(s_\nu^{(2)}) \times \mathfrak{n}(s_\nu^{(2)})\end{aligned}$$

ist. Das widerspricht aber der einleitenden Bemerkung über die dreiparametrige Vektormannigfaltigkeit

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(s, n, r).$$

Schließlich werde gezeigt, daß $F_{h,\tau}$, abgesehen von der Randkurve C, ganz in R liegt. Zunächst gibt es nach der Voraussetzung (c) über E zu E'' eine positive Zahl b, so daß eine Kugel mit dem Radius b um irgendeinen Punkt von E'' von S nur Punkte enthält, die gleichzeitig E angehören. Bezeichnet man nun mit ϱ die Entfernung des Randes der Projektion von E'' auf die Tangentialebene in einem Punkte von C vom Rande der Projektion von E, so muß b offenbar kleiner als ϱ sein, denn sonst gäbe es sicher eine Kugel vom Radius b um einen Punkt von E'', die Punkte von S enthielte, die nicht zu E gehören.

Bezeichnet nun a_2 die untere Grenze der Krümmungsradien aller Normalschnitte von E — auf Grund der Voraussetzungen über E ist $a_2 > 0$ —, so unterliege h außer den früheren Forderungen der Einschränkung, daß

$$h < \text{Min}\,(b, a_2) \tag{93}$$

ist. Weiter wähle man τ abgesehen von den früheren Forderungen so, daß

$$0 < \tau < 1 \tag{94}$$

gilt. Wegen (93) und (94) gehört dann jeder erzeugende Bogen $C^{(s)}$ von $F_{h,\tau}$ ganz der Kugel vom Radius b um den Punkt s von C an. In dieser Kugel kommen nach Voraussetzung von S nur Punkte vor, die auch E angehören. Nehmen wir nun an, daß $F_{h,\tau}$ abgesehen von C nicht ganz in R liegt, so müßte die Punktmenge $F_{h,\tau} - C$ mit E Punkte gemeinsam haben. Dann gibt es aber einen Bogen $C^{(s)}$, der mit E, abgesehen von dem Punkte s auf C, noch einen weiteren Punkt gemeinsam hat. Schneidet die $e_1(s)$, $e_3(s)$-Ebene E längs der Kurve $\mathfrak{C}^{(s)}$, deren Gleichung

$$\zeta^{(s)} = \zeta^{(s)}(\xi^{(s)})$$

laute, so müssen also $C^{(s)}$ und $\mathfrak{C}^{(s)}$, abgesehen von s, noch einen weiteren Punkt gemeinsam haben.

Versteht man nun unter $K^{(s)}$ den Halbkreisbogen

$$\xi^{(s)}(\alpha) = \frac{h}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{h}\right), \quad \zeta^{(s)}(\alpha) = \frac{h}{2}\left(\sin\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 1\right),$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqq h \leqq \frac{\pi}{2}\,h,$$

so haben wegen der vorhin gemachten Bemerkung über b auch $\mathfrak{C}^{(s)}$ und $K^{(s)}$, abgesehen vom Punkte s von C, einen weiteren Punkt $P = (\xi_0^{(s)}, \zeta_0^{(s)})$ gemeinsam.

Versteht man nun unter $\beta_{\mathfrak{C}}(\xi^{(s)})$ bzw. $\beta_K(\xi^{(s)})$ die Winkel, die die Tangenten an $\mathfrak{C}^{(s)}$ bzw. $K^{(s)}$ mit der positiven $\xi^{(s)}$-Achse bilden, so muß es in $0 \leqq \xi^{(s)} \leqq \xi_0^{(s)}$ sicherlich $\xi^{(s)}$-Werte geben, für die

$$\beta_{\mathfrak{C}}(\xi^{(s)}) > \beta_K(\xi^{(s)})$$

ist, falls nicht dauernd

$$\beta_{\mathfrak{C}}(\xi^{(s)}) = \beta_K(\xi^{(s)}) \tag{95}$$

ist. Die untere Grenze dieser $\xi^{(s)}$-Werte sei mit $\xi_1^{(s)}$ bezeichnet, so daß

$$\beta_{\mathfrak{C}}(\xi_1^{(s)}) = \beta_K(\xi_1^{(s)})$$

gilt. Ist aber in $0 \leqq \xi^{(s)} \leqq \xi_0^{(s)}$ ständig (95) erfüllt, so setze man $\xi_1^{(s)} = 0$.

Wird mit $K_1^{(s)}$ der Kreis vom Radius $\frac{h}{2}$ bezeichnet, der $\mathfrak{C}^{(s)}$ im Punkte

$$P_1 = (\xi_1^{(s)}, \zeta^{(s)}(\xi_1^{(s)}))$$

berührt, so liegt die Kurve $\mathfrak{C}^{(s)}$ für $\xi^{(s)} > \xi_1^{(s)}$, falls $\xi^{(s)} - \xi_1^{(s)}$ hinreichend klein ist, entweder $K_1^{(s)}$ an, oder sie durchsetzt diesen Kreis. Ist nun t die Bogen-

änge auf $K_1^{(s)}$ und besitzt $\mathfrak{C}^{(s)}$ in einem ξ, ζ-Koordinatensystem, das in P_1 die Tangential-Normallage hat, die Gleichung

$$\zeta = \gamma(\xi),$$

so sind die zu derselben Abszisse

$$\xi = \frac{h}{2} \sin \frac{2t}{h}$$

gehörenden ζ-Ordinaten durch

$$\gamma\left(\frac{h}{2} \sin\left(\frac{2t}{h}\right)\right) \text{ bzw. } \frac{h}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2t}{h}\right)\right)$$

gegeben. Für alle hinreichend kleinen positiven t gilt also

$$\gamma\left(\frac{h}{2} \sin\left(\frac{2t}{h}\right)\right) - \frac{h}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2t}{h}\right)\right) \geqq 0.$$

Aus

$$\gamma\left(\frac{h}{2} \sin\left(\frac{2t}{h}\right)\right) = \frac{1}{2} \frac{d^2\gamma(\xi^*)}{d\xi^2}\left[\frac{h}{2} \sin\left(\frac{2t}{h}\right)\right]^2$$
$$= \frac{1}{2} \frac{d^2\gamma(\xi^*)}{d\xi^2}\left[t - \frac{4t^3}{3!\,h^2} + \cdots\right]^2,$$

wobei ξ^* ein geeigneter Zwischenwert ist, und aus

$$\frac{h}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2t}{h}\right)\right) = \frac{t^2}{h} - \frac{t^4}{3h^3} + \cdots$$

folgt dann aber für die Krümmung $\varkappa$ von $\mathfrak{C}^{(s)}$ in P_1

$$\varkappa = \frac{d^2\gamma(0)}{d\xi^2} \geqq \frac{2}{h} > \frac{2}{a_2},$$

da $\frac{d\gamma(0)}{d\xi} = 0$ ist.

Bezeichnet man mit ε den Winkel, den die Flächennormalen in p und P_1 miteinander einschließen, nach der Voraussetzung (a) über E ist $\cos\varepsilon > \frac{1}{2}$, so liefert die Formel von Meusnier für die Krümmung $\varkappa_n$ des ebenen Normalschnittes von E in P_1, dessen Ebene die ξ-Achse enthält,

$$\varkappa_n = \varkappa \cos\varepsilon > \frac{2\cos\varepsilon}{a_2} > \frac{1}{a_2}.$$

Die daraus resultierende Ungleichung

$$\frac{1}{\varkappa_n} < a_2$$

widerspricht aber der Bedeutung von a_2.

16. Das Innere des von der geschlossenen Fläche S berandeten Gebietes werde mit $\bar{R}$ bezeichnet, wobei also $\bar{R}$ ganz dem Gebiete R angehört. Bildet man alsdann, um den Satz 6 zu beweisen, mit den auf S angenommenen Werten der partiellen Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial U}{\partial \eta}, \frac{\partial U}{\partial \zeta}$ für das Gebiet $\bar{R}$ Funktionen

$$u(P; -1), \quad v(P; -1), \quad \overline{w}(P; -1)$$

der Gestalt (87), so kann man dem Beweis des Satzes 4 entnehmen, daß in $\bar{R} + \bar{S}$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \equiv \bar{u}(P; -1), \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} \equiv \bar{v}(P; -1), \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta} \equiv \bar{w}(P; -1)$$

sein muß.

Es gibt nun sicher eine positive Zahl b_1 derart, daß eine Kugel mit dem Radius b_1 um irgendeinen Punkt von E' von $\bar{S}$ keine anderen Punkte enthält als solche, die gleichzeitig E'' angehören (vgl. die entsprechende Definition von a_1). Versteht man dann unter R' das Teilgebiet von $\bar{R}$, welches aus allen Punkten von $\bar{R}$ besteht, deren Abstand von einem beliebigen Punkte von E'' kleiner als $\frac{b_1}{4}$ ist, so soll gezeigt werden, daß die Funktionen

$$\bar{u}(P; -1), \quad \bar{v}(P; -1), \quad \bar{w}(P; -1)$$

für alle Punkte von $R' + E'$ einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügen, womit Satz 6 bewiesen wäre.

Dazu beachte man zunächst, daß man den Hilfssatz 3 von § 3 in der folgenden modifizierten Gestalt beweisen kann: Ist $f(p)$ auf S eine integrable Funktion, die auf dem in $\bar{S}$ enthaltenen regulären Flächenelement E'' (Hölder-Konstanten: A, λ) einer gleichmäßigen H-Bedingung (Hölder-Konstanten: B, μ) genügt, so gilt für alle Punkte p und q von einem ganz in E'' enthaltenen regulären Flächenelement E' eine der drei Abschätzungen

$$\left.\begin{matrix} |V(q) - V(p)| \\ |W(q) - W(p)| \end{matrix}\right\} \leqq \begin{cases} KABt^{2+\mu} \\ KABt \\ KABt|\log t| \end{cases},$$

je nachdem

$$\mu + \lambda < 1, \quad \mu + \lambda > 1, \quad \mu + \lambda = 1$$

ist.

Aus dem Beweise des Hilfssatzes 7 von § 4 ist dann aber zu ersehen, daß die Funktionen $F(p; \varkappa)$, $G(p; \varkappa)$, $H(p; \varkappa)$, die dem zu der Berandung $\bar{S}$ gehörigen Integralgleichungssystem (75) genügen, auf E' eine H-Bedingung mit dem Exponenten μ erfüllen.

Als Modifikation von Hilfssatz 11 in § 3 kann man weiterhin zeigen, daß für eine auf S definierte integrable Belegungsfunktion $f(p)$, die auf E'' einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten μ genügt, die Integrale $V(P)$ und $W(P)$ in $R' + E'$ eine gleichmäßige H-Bedingung mit demselben Exponenten μ erfüllen. Bei dem Beweise, der sonst genau wie der Beweis von Hilfssatz 11 in § 3 verläuft, ist nur die dort vorkommende Zahl ϱ_0 durch b_1 zu ersetzen. Damit folgt aber, daß die durch (76) nach Ersatz von $u^*(P; \varkappa)$, $v^*(P; \varkappa)$, $w^*(P; \varkappa)$ durch $u^*(P; \varkappa)$, $\bar{v}^*(P; \varkappa)$, $\bar{w}^*(P; \varkappa)$ und von $F(p; \varkappa)$, $G(p; \varkappa)$, $H(p; \varkappa)$ bzw. durch $\bar{F}(p; \varkappa)$, $\bar{G}(p; \varkappa)$, $\bar{H}(p; \varkappa)$ gegebenen Funktionen

*, v^*, $\overline{w}^*$ in $R' + E'$ einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so daß asselbe schließlich auch von

$$\overline{u}(P;-1) = \frac{\overline{u}^*(P;-1)}{\overline{D^{(m)}}(-1)}, \qquad \overline{v}(P;-1) = \frac{\overline{v}^*(P;-1)}{\overline{D^{(m)}}(-1)},$$
$$\overline{w}(P;-1) = \frac{w^*(P;-1)}{\overline{D^{(m)}}(-1)},$$

nd zwar sowohl für $\overline{D^{(m)}}(-1) \neq 0$ als auch für $\overline{D^{(m)}}(-1) = 0$ gilt.

§ 5.

Das äußere Problem im Raume.

1. Für das äußere Problem im Raume besteht folgender Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Hauptsatz II. *Ist R_a das Außengebiet eines einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Gebietes R, dessen Berandung S den in § 1 genannten Voraussetzungen genügt, und besitzen die auf S definierten Funktionen ϱ, σ, τ dort partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, und sind sie die auf S angenommenen Werte der partiellen Ableitungen erster Ordnung einer in R_a zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, deren erste partielle Ableitungen im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, so gibt es (bis auf eine additive Konstante) genau eine in R_a biharmonische Funktion U, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R_a + S$ stetig sind, auf S bzw. mit ϱ, σ, τ übereinstimmen und im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, während die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen*[45]).

Dem Problem (62), (63) des vorigen Paragraphen entsprechend gehen wir jetzt von dem auf das Gebiet R_a und seine Berandung S bezüglichen Problem

96) $$\Delta u - \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = 0, \qquad \Delta v - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0, \qquad \Delta w - \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = 0, \qquad \Delta \vartheta = 0,$$

97) $$[u]_S = \varrho, \qquad [v]_S = \sigma, \qquad [w]_S = \tau$$

us und können dafür den folgenden Satz beweisen:

[45]) Die im Text angegebenen Eigenschaften von U im Unendlichen folgen auch bereits aus den schwächeren Forderungen, daß für $r_{OP} \to \infty$

$$\lim D^1 U = 0, \qquad \lim (r_{OP} D^2 U) = 0$$

ein soll, wie man an den auf das Gebiet R_a angewandten Formeln (30) unmittelbar rkennen kann — eine Bemerkung, die sich auch auf die folgenden Sätze 7, 8 nd 10 sinngemäß übertragen läßt.

Satz 7. *Sind die Funktionen ϱ, σ, τ die auf S angenommenen Werte der partiellen Ableitungen einer in R_a zweimal stetig differenzierbaren Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, deren erste partielle Ableitungen im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, und gibt es ein Lösungssystem u, v, w des Problems* (96), (97), *das im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwindet, und dessen partielle Ableitungen erster Ordnung in $R_a + S$ stetig sind und im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden, so existiert eine biharmonische Funktion U derart, daß*

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial \zeta}$$

ist.

Bedeuten die Flächen S_n^a eine im Gebiet R_a gelegene Folge von gegen S konvergierenden Näherungsflächen, die man aus den früher definierten im Gebiet R gelegenen Flächen S_n durch die Transformation durch reziproke Radien gewinnt, und wird das von ihnen begrenzte Außengebiet mit R_n^a bezeichnet, so lege man dem Beweise, der sonst genau wie der von Satz 1 geführt wird, eine Integralformel der Gestalt (68) zugrunde, bei der aber das Flächenintegral über die Fläche S_n^a und die Raumintegrale über das Außengebiet R_n^a erstreckt werden.

Satz 7 sichert alsdann zusammen mit den beiden folgenden, in den nächsten Abschnitten zu beweisenden Sätzen die Existenz einer im Gebiet R_a biharmonischen Funktion mit den im Hauptsatz behaupteten Eigenschaften:

Satz 8. *Bei beliebig vorgegebenen auf S stetigen Funktionen ϱ, σ, τ hat das Problem* (96), (97) *stets ein System von Lösungsfunktionen u, v, w, die im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen.*

Satz 9. *Besitzen die Funktionen ϱ, σ, τ auf S überdies partielle Ableitungen erster Ordnung, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so sind die nach Satz 8 existierenden Lösungsfunktionen in $R_a - S$ einmal stetig partiell differenzierbar.*

Hinsichtlich der Einzigkeit der Lösung können wir folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Satz 10. *Werden die Funktionen ϱ, σ, τ auf S lediglich als stetig vorausgesetzt, so kann es (bis auf eine additive Konstante) höchstens eine in R biharmonische Funktion U geben, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R_a + S$ stetig sind, bei Annäherung an S bzw. gegen die Funktionen ϱ, σ, τ*

konvergieren und im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ *verschwinden, während die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung dort wie* $\frac{1}{r_{OP}^2}$ *gegen Null gehen.*

2. Indem wir statt des Problems (96), (97) gleich das allgemeinere Problem

$$\Delta u + k\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = 0, \quad \Delta v + k\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} = 0, \quad \Delta w + k\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta} = 0, \quad \Delta\vartheta = 0, \tag{98}$$

$$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \quad [w]_S = \tau \tag{99}$$

betrachten, bei dem k ein Parameter ist, gehen wir von dem mit Hilfe der durch (71) gegebenen Kerne gebildeten Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned}
f(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{(S)} &\{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\
&+ K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \varrho(p), \\
g(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{(S)} &\{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\
&+ K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \sigma(p), \\
h(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{(S)} &\{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\, f(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\, g(p';\varkappa) + \\
&+ K_{\zeta\zeta}(p\,p';\varkappa)\, h(p';\varkappa)\}\, d\sigma = \tau(p)
\end{aligned} \tag{100}$$

aus, bei dem wieder

$$\varkappa = \frac{k}{2+k} \quad (k \neq -2)$$

gesetzt ist. Das dazugehörige homogene Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned}
f_1(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{(S)} &\{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\, f_1(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\, g_1(p';\varkappa) + \\
&+ K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\, h_1(p';\varkappa)\}\, d\sigma = 0, \\
g_1(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{(S)} &\{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\, f_1(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\, g_1(p';\varkappa) + \\
&+ K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\, h_1(p';\varkappa)\}\, d\sigma = 0, \\
h_1(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{(S)} &\{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\, f_1(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\, g_1(p';\varkappa) + \\
&+ K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\, h_1(p';\varkappa)\}\, d\sigma = 0
\end{aligned} \tag{101}$$

besitzt nun für alle $\varkappa$-Werte, wie unmittelbar aus (24) und (25) zu ersehen ist, die drei linear unabhängigen Lösungssysteme

$$\begin{aligned}
&f_{11} = a, \quad g_{11} = 0, \quad h_{11} = 0, \\
&f_{12} = 0, \quad g_{12} = b, \quad h_{12} = 0, \\
&f_{13} = 0, \quad g_{13} = 0, \quad h_{13} = c,
\end{aligned} \tag{102}$$

wenn a, b, c drei beliebige nichtverschwindende Konstanten sind. Schreibt man nunmehr das System (101) nach der im Abschnitt 4 von § 4 angegebenen Methode als eine einzige homogene Integralgleichung

$$f_1^*(p) - \frac{1}{2\pi}\int\int_{(\mathfrak{S})} K(p, p'; \varkappa) f_1^*(p')\, d\sigma = 0,$$

wobei die Variablen auf der dort angegebenen Fläche $\mathfrak{S}$ variieren, so müssen also die mit Hilfe der m-ten Iterierten (m hinreichend groß und ungerade) des Kerns

$$\frac{1}{2\pi} K(p, q; \varkappa)$$

gebildeten Fredholmschen Unterdeterminanten von niederer als der dritten Ordnung identisch in $\varkappa$ und ihren auf $\mathfrak{S}$ variierenden Variablen verschwinden. Wir behaupten aber, daß es für $\varkappa = 0$ (d. h. $k = 0$) eine Unterdeterminante dritter Ordnung geben muß, die ungleich Null ist, so daß also bei geeigneten auf $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkten p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{pmatrix}; 0 \neq 0 \tag{103}$$

gilt.

Denn wäre (103) nicht erfüllt, so müßte das aus (101) für $\varkappa = 0$ hervorgehende Integralgleichungssystem

$$f_1(p) - \frac{1}{2\pi}\int\int_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} f_1(p')\, d\sigma = 0,$$

$$g_1(p) - \frac{1}{2\pi}\int\int_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} g_1(p')\, d\sigma = 0,$$

$$h_1(p) - \frac{1}{2\pi}\int\int_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} h_1(p')\, d\sigma = 0$$

nach m-facher Iteration mehr als drei linear unabhängige Lösungssysteme besitzen. Dann wäre das aber auch der Fall für das System

$$f_1(p) - \frac{\eta\mu}{2\pi}\int\int_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} f_1(p')\, d\sigma = 0,$$

$$g_1(p) - \frac{\eta\mu}{2\pi}\int\int_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} g_1(p')\, d\sigma = 0,$$

$$h_1(p) - \frac{\eta\mu}{2\pi}\int\int_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_{p'})}{r_{p'p}^2} h_1(p')\, d\sigma = 0,$$

wobei η_μ eine geeignet zu wählende m-te Einheitswurzel ($\eta_\mu^m = 1$) ist. Bereits im Abschnitt 4 von § 4 wurde aber erwähnt, daß für dieses System überhaupt nur dann nicht identisch verschwindende Lösungen existieren, wenn $\eta_\mu = 1$ ist. Dann besitzt es aber, wie in der Potentialtheorie bei der Behandlung des äußeren Problems bewiesen wird[46]), auch nur die drei in (102) angegebenen linear unabhängigen Lösungssysteme, so daß tatsächlich (103) zutrifft.

3. Die in $\varkappa$ ganze transzendente Funktion

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}; \varkappa \tag{104}$$

kann also nur für in der komplexen $\varkappa$-Ebene diskret gelegene $\varkappa$-Werte verschwinden. Für $\varkappa$-Werte, für die die Determinante (104) nicht verschwindet, geben alsdann nach einem Ergebnis der Fredholmschen Theorie die Determinanten

$$\begin{gathered} f_{21}^*(p;\varkappa) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p & q_2 & q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big), \quad f_{22}^*(p;\varkappa) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & p & q_3 \end{pmatrix}; \varkappa\Big), \\ f_{23}^*(p;\varkappa) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & p \end{pmatrix}; \varkappa\Big) \end{gathered} \tag{105}$$

drei linear unabhängige Lösungssysteme des m-fach iterierten zu (101) assoziierten Integralgleichungssystems

$$\begin{aligned} f_2(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)}\int\limits \{K_{\xi\xi}(p', p;\varkappa)\, f_2(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p', p;\varkappa)\, g_2(p';\varkappa) + \\ + K_{\xi\zeta}(p', p;\varkappa)\, h_2(p';\varkappa)\}\, d\sigma = 0, \\ g_2(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)}\int\limits \{K_{\eta\xi}(p', p;\varkappa)\, f_2(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p', p;\varkappa)\, g_2(p';\varkappa) + \\ + K_{\eta\zeta}(p', p;\varkappa)\, h_2(p';\varkappa)\}\, d\sigma = 0, \\ h_2(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)}\int\limits \{K_{\zeta\xi}(p', p;\varkappa)\, f_2(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p', p;\varkappa)\, g_2(p';\varkappa) + \\ + K_{\zeta\zeta}(p', p;\varkappa)\, h_2(p';\varkappa)\}\, d\sigma = 0 \end{aligned} \tag{106}$$

und damit auch von (106) selbst, da (106) mindestens drei linear unabhängige Lösungen hat. Diese durch (105) gegebenen Lösungen von (106) seien mit

$$\begin{aligned} &f_{21}(p;\varkappa), \quad g_{21}(p;\varkappa), \quad h_{21}(p;\varkappa), \\ &f_{22}(p;\varkappa), \quad g_{22}(p;\varkappa), \quad h_{22}(p;\varkappa), \\ &f_{23}(p;\varkappa), \quad g_{23}(p;\varkappa), \quad h_{23}(p;\varkappa) \end{aligned} \tag{107}$$

[46]) Vgl. etwa W. Sternberg, Potentialtheorie II, Berlin und Leipzig 1926, insbes. S. 108. Die dortigen Schlüsse gelten auch bei unseren Voraussetzungen über die Berandung.

bezeichnet. Für die betrachteten $\varkappa$-Werte lauten dann die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Lösung der inhomogenen Gleichungen (100)

$$(108)\quad \begin{aligned} &\iint_{(S)} \{f_{21}(p';\varkappa)\,\varrho(p') + g_{21}(p';\varkappa)\,\sigma(p') + h_{21}(p';\varkappa)\,\tau(p')\}\,d\sigma = 0,\\ &\iint_{(S)} \{f_{22}(p';\varkappa)\,\varrho(p') + g_{22}(p';\varkappa)\,\sigma(p') + h_{22}(p';\varkappa)\,\tau(p')\}\,d\sigma = 0,\\ &\iint_{(S)} \{f_{23}(p';\varkappa)\,\varrho(p') + g_{23}(p';\varkappa)\,\sigma(p') + h_{23}(p';\varkappa)\,\tau(p')\}\,d\sigma = 0, \end{aligned}$$

die, wenn sie überhaupt erfüllt sind, natürlich identisch in $\varkappa$ gelten, da die Funktionen (107) in $\varkappa$ ganz transzendent sind.

Nehmen wir nunmehr zunächst an, daß die gegebenen Randfunktionen $\varrho(p)$, $\sigma(p)$, $\tau(p)$ auf S stetig sind und diese Bedingungen für alle $\varkappa$ erfüllen, so kann für $\varkappa$-Werte, für die die Determinante (104) nicht verschwindet, eine Lösung von (100) in der Form

$$f(p;\varkappa) = \frac{F(p;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3\end{matrix};\varkappa\right)},\qquad g(p;\varkappa) = \frac{G(p;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3\end{matrix};\varkappa\right)},$$

$$h(p;\varkappa) = \frac{H(p;\varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3\end{matrix};\varkappa\right)}$$

angegeben werden, wobei die jeweils im Zähler stehenden Funktionen in $\varkappa$ ganz transzendent sind und den Integralgleichungen

$$(109)\quad \begin{aligned} &F(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) +\\ &\qquad + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3\end{matrix};\varkappa\right)\varrho(p),\\ &G(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) +\\ &\qquad + K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3\end{matrix};\varkappa\right)\sigma(p),\\ &H(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\,F(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\,G(p';\varkappa) +\\ &\qquad + K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\,H(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\left(\begin{matrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3\end{matrix};\varkappa\right)\tau(p) \end{aligned}$$

genügen.

Bildet man nämlich für den Kern $\frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa)$ die Fredholmsche Unterdeterminante

$$D^{(m)}\left(\begin{matrix}p\,p_1 p_2 p_3\\ q\,q_1 q_2 q_3\end{matrix};\varkappa\right),$$

für die bekanntlich die Relation

$$(110)\quad \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p\,p_1\,p_2\,p_3 \\ q\,q_1\,q_2\,q_3 \end{pmatrix}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\,p_2\,p_3 \\ q_1\,q_2\,q_3 \end{pmatrix}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p,q;\varkappa) -$$

$$- \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p,q_1;\varkappa)\,\frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\,p_2\,p_3 \\ q\,q_2\,q_3 \end{pmatrix}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\,p_2\,p_3 \\ q_1\,q_2\,q_3 \end{pmatrix}} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p,q_2;\varkappa)\,\frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\,p_2\,p_3 \\ q\,q_1\,q_3 \end{pmatrix}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\,p_2\,p_3 \\ q_1\,q_2\,q_3 \end{pmatrix}} -$$

$$- \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p,q_3;\varkappa)\,\frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\,p_2\,p_3 \\ q\,q_1\,q_2 \end{pmatrix}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\,p_2\,p_3 \\ q_1\,q_2\,q_3 \end{pmatrix}} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \iint_{(S)} K^{(m)}(p,p';\varkappa)\,\frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p'\,p_1\,p_2\,p_3 \\ q\,q_1\,q_2\,q_3 \end{pmatrix}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\,p_2\,p_3 \\ q_1\,q_2\,q_3 \end{pmatrix}}\,d\sigma$$

besteht[47]), und setzt man

$$(111)\quad \Omega(p,q;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 K^{(2)}(p,q;\varkappa) + \cdots + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m K^{(m)}(p,q;\varkappa),$$

$$(112)\quad \Gamma^{(m)}(p,q;\varkappa) = \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p\,p_1\,p_2\,p_3 \\ q\,q_1\,q_2\,q_3 \end{pmatrix}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1\,p_2\,p_3 \\ q_1\,q_2\,q_3 \end{pmatrix}},$$

$$(113)\quad \Gamma(p,q;\varkappa) = \Omega(p,q;\varkappa) + \iint_{(S)} \Omega(p,p';\varkappa)\,\Gamma^{(m)}(p',q;\varkappa)\,d\sigma,$$

so stellt die Funktion

$$(114)\quad f^*(p;\varkappa) = \varrho^*(p) + \iint_{(S)} \Gamma(p,p';\varkappa)\,\varrho^*(p')\,d\sigma$$

eine Lösung der zu dem System (100) äquivalenten Integralgleichung

$$(115)\quad f^*(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} K(p,p';\varkappa)\,f^*(p';\varkappa)\,d\sigma = \varrho^*(p)$$

dar.

[47]) Vgl. E. Goursat, l. c., Anm. [35]), insbes. S. 376.

Beweis. Es ist zunächst

$$(116)\qquad \Omega(p,q;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\Omega(p',q;\varkappa)\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,K^{(m)}(p',q;\varkappa)\,d\sigma.$$

Setzt man nun

$$\Psi(p,q;\varkappa) = \Gamma(p,q;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\Gamma(p',q;\varkappa)d\sigma$$

$$= \Omega(p,q;\varkappa) + \iint_{(\mathfrak{S})}\Omega(p,p';\varkappa)\,\Gamma^{(m)}(p',q;\varkappa)\,d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\Omega(p,p';\varkappa)\,d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\Omega(p',p'';\varkappa)\,\Gamma^{(m)}(p'',q;\varkappa)\,d\sigma_{p'}\,d\sigma_{p''},$$

so wird bei Zusammenfassung des ersten und dritten Summanden gemäß (116)

$$\Psi(p,q;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,K^{(m)}(p',q;\varkappa)\,d\sigma +$$

$$+ \iint_{(\mathfrak{S})}\Omega(p,p';\varkappa)\,\Gamma^{(m)}(p',q;\varkappa)\,d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,\Omega(p',p'';\varkappa)\,\Gamma^{(m)}(p'',q;\varkappa)\,d\sigma_{p'}\,d\sigma_{p''}.$$

Daraus folgt aber ebenfalls bei Beachtung von (116)

$$\Psi(p,q;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\,K^{(m)}(p',q;\varkappa)\,d\sigma +$$

$$+\iint_{(\mathfrak{S})}\left\{\frac{1}{2\pi}K(p,p';\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p'';\varkappa)\,K^{(m)}(p'',p')\,d\sigma_{p''}\right\}\Gamma^{(m)}(p',q;\varkappa)\,d\sigma_{p'}$$

$$= \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{S})} K(p,p';\varkappa)\left\{\Gamma^{(m)}(p',q;\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m} K^{(m)}(p',q;\varkappa) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m}\iint_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p',p'';\varkappa)\,\Gamma^{(m)}(p'',q;\varkappa)\,d\sigma_{p''}\right\} d\sigma_{p'}.$$

Wegen (112), (110) und (105) erhält man alsdann

$$(117)\quad \Psi(p,q;\varkappa) = \Gamma(p,q;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} K(p,p';\varkappa)\,\Gamma(p',q;\varkappa)\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{f^*_{21}(q;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)}\iint_{(S)} K(p,p';\varkappa)K^{(m)}(p',q_1;\varkappa)\,d\sigma +$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{f^*_{22}(q;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)}\iint_{(S)} K(p,p';\varkappa)\,K^{(m)}(p',q_2;\varkappa)\,d\sigma -$$

$$-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{f^*_{23}(q;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)}\iint_{(S)} K(p,p';\varkappa)\,K^{(m)}(p',q_3;\varkappa)\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi}K(p,q;\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} f^*_{21}(q;\varkappa)\,\frac{K^{(m+1)}(p,q_1;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)} +$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} f^*_{22}(q;\varkappa)\,\frac{K^{(m+1)}(p,q_2;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)} - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1} f^*_{23}(q;\varkappa)\,\frac{K^{(m+1)}(p,q_3;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)}.$$

Für die durch (114) gegebene Funktion ist nun

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} K(p,p';\varkappa)f^*(p';\varkappa)d\sigma = \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} K(p,p';\varkappa)\varrho^*(p')d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint_{(S)}\varrho^*(p')\left\{\iint_{(S)} K(p,p'';\varkappa)\,\Gamma(p'',p';\varkappa)d\sigma_{p''}\right\}d\sigma_p,$$

oder mit (117)

$$\frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} K(p,p';\varkappa)f^*(p';\varkappa)d\sigma - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} K(p,p';\varkappa)\varrho^*(p')d\sigma +$$

$$+\iint_{(S)}\varrho^*(p')\Big\{\Gamma(p,p';\varkappa) - \frac{1}{2\pi}K(p,p';\varkappa) - \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{K^{(m+1)}(p,q_1;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)} f^*_{21}(p';\varkappa) -$$

$$-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{K^{(m+1)}(p,q_2;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)} f^*_{22}(p';\varkappa) + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{K^{(m+1)}(p,q_3;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)} f^*_{23}(p';\varkappa)\Big\}d\sigma$$

$$= \iint_{(S)}\Gamma(p,p';\varkappa)\varrho^*(p')d\sigma +$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{K^{(m+1)}(p,q_1;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)}\iint_{(S)}\varrho^*(p')f^*_{21}(p';\varkappa)d\sigma -$$

$$-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{K^{(m+1)}(p,q_2;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)}\iint_{(S)}\varrho^*(p')f^*_{22}(p';\varkappa)d\sigma +$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{m+1}\frac{K^{(m+1)}(p,q_3;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1\,p_2\,p_3\\ q_1\,q_2\,q_3\end{pmatrix};\varkappa)}\iint_{(S)}\varrho^*(p')f^*_{23}(p';\varkappa)d\sigma.$$

Wegen (108) muß dann aber einfach

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} K(p, p'; \varkappa) f^*(p'; \varkappa)\, d\sigma = \iint\limits_{(S)} \Gamma(p, p'; \varkappa)\, \varrho^*(p')\, d\sigma,$$

oder wegen (114)

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} K(p, p'; \varkappa) f^*(p'; \varkappa) d\sigma = f^*(p; \varkappa) - \varrho^*(p)$$

sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

4. Mit wörtlich den gleichen Methoden, die bei der Behandlung des inneren räumlichen Problems benutzt wurden, kann man zeigen, daß die Funktionen

$$(118) \qquad u(P; \varkappa) = \frac{u^*(P; \varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{matrix}; \varkappa\right)}, \quad v(P; \varkappa) = \frac{v^*(P; \varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{matrix}; \varkappa\right)},$$

$$w(P; \varkappa) = \frac{w^*(P; \varkappa)}{D^{(m)}\left(\begin{matrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 \end{matrix}; \varkappa\right)}$$

mit

$$u^*(P; \varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p'; \varkappa) F(p'; \varkappa) + K_{\xi\eta}(P, p'; \varkappa) G(p'; \varkappa) + K_{\xi\zeta}(P, p'; \varkappa) H(p'; \varkappa)\} d\sigma,$$

$$v^*(P; \varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p'; \varkappa) F(p'; \varkappa) + K_{\eta\eta}(P; p'; \varkappa) G(p'; \varkappa) + K_{\eta\zeta}(P, p'; \varkappa) H(p'; \varkappa)\} d\sigma,$$

$$w^*(P; \varkappa) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(P, p'; \varkappa) F(p'; \varkappa) + K_{\zeta\eta}(P, p'; \varkappa) G(p'; \varkappa) + K_{\zeta\zeta}(P, p'; \varkappa) H(p'; \varkappa)\} d\sigma$$

für $\varkappa = k = -1$, auch wenn die in ihnen vorkommende Nennerdeterminante dort verschwindet, das Problem (98), (99) lösen, womit also der Satz 8 für Funktionen ϱ, σ, τ, die für alle $\varkappa$ den Bedingungen (108) genügen, bewiesen ist[48]).

[48]) Die bei der Lösung des inneren Problems herangezogene GREENsche Formel (86) läßt sich hier beim äußeren Problem sinngemäß in der Form

$$\iiint\limits_{(R_n^a)} (\Delta U^*)^2\, d\tau = \iint\limits_{(S_n^a)} \left\{U^* \frac{\partial \Delta U^*}{\partial n} - \Delta U^* \frac{\partial U^*}{\partial n}\right\} d\sigma$$

benutzen, wo U^* durch

$$u^*(P; -1) = \frac{\partial U^*}{\partial \xi}, \quad v^*(P; -1) = \frac{\partial U^*}{\partial \eta}, \quad w^*(P; -1) = \frac{\partial U^*}{\partial \zeta}$$

gegeben ist, wenn auf S die Gleichungen

$$[u^*(P; -1)]_S = 0, \quad [v^*(P; -1)]_S = 0, \quad [w^*(P; -1)]_S = 0$$

bestehen, da ja im Unendlichen U^* sich beschränkt verhält, $\frac{\partial U^*}{\partial n}$ wie $\frac{1}{r_{OP}}$, ΔU^* wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ und $\frac{\partial \Delta U^*}{\partial n}$ wie $\frac{1}{r_{OP}^3}$ verschwindet.

5. Erfüllen aber die gegebenen Funktionen ϱ, σ, τ für alle $\varkappa$-Werte nicht die Bedingungen (108), so bilde man unter Benutzung der drei Lösungssysteme

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1+k}{2+k}\frac{1}{r_{OP}} - \frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\xi^2} = \frac{1}{2r_{OP}} + \varkappa\left\{\frac{1}{2r_{OP}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\xi^2}\right\},\\
v_1 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\eta\,\partial\xi} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\xi\,\partial\eta},\\
w_1 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\xi\,\partial\zeta} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\xi\,\partial\zeta},\\
u_2 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\eta\,\partial\xi} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\eta\,\partial\xi},\\
v_2 &= \frac{1+k}{2+k}\frac{1}{r_{OP}} - \frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\eta^2} = \frac{1}{2r_{OP}} + \varkappa\left\{\frac{1}{2r_{OP}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\eta^2}\right\},\\
w_2 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\eta\,\partial\zeta} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\eta\,\partial\zeta},\\
u_3 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\zeta\,\partial\xi} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\zeta\,\partial\xi},\\
v_3 &= -\frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\zeta\,\partial\eta} = -\frac{\varkappa}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\zeta\,\partial\eta},\\
w_3 &= \frac{1+k}{2+k}\frac{1}{r_{OP}} - \frac{k}{2(2+k)}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\zeta^2} = \frac{1}{2r_{OP}} + \varkappa\left\{\frac{1}{2r_{OP}} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_{OP}}{\partial\zeta^2}\right\}
\end{aligned}
\tag{119}
$$

von (98), bei denen r_{OP} der Abstand des nach Annahme im Gebiet R gelegenen Koordinatenursprungs O des ξ, η, ζ-Systems von dem im Gebiet R_a liegenden Aufpunkt P ist, die neuen Randfunktionen

$$
\begin{aligned}
\bar{\varrho} &= \varrho - l_1[u_1]_S - l_2[u_2]_S - l_3[u_3]_S,\\
\bar{\sigma} &= \sigma - l_1[v_1]_S - l_2[v_2]_S - l_3[v_3]_S,\\
\bar{\tau} &= \tau - l_1[w_1]_S - l_2[w_2]_S - l_3[w_3]_S.
\end{aligned}
\tag{120}
$$

Setzt man sie in (108) statt ϱ, σ, τ ein, so ergibt sich zur Bestimmung der l_1, l_2, l_3 ein System von drei linearen inhomogenen Gleichungen, von dessen dreireihiger Koeffizientendeterminante $\Delta(\varkappa)$, die ja eine ganze transzendente Funktion in $\varkappa$ ist, wir in den nächsten Abschnitten zeigen werden, daß sie nicht identisch verschwindet.

Für alle Werte von $\varkappa$, für die weder die Fredholmsche Determinante (104) noch $\Delta(\varkappa)$ verschwindet, läßt sich eine Lösung der inhomogenen Integralgleichungen

$$\bar{f}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\bar{f}(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\bar{g}(p';\varkappa) + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\bar{h}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \bar{\varrho}(p),$$

$$\bar{g}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\bar{f}(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\bar{g}(p';\varkappa) + K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\bar{h}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \bar{\sigma}(p),$$

$$\bar{h}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\bar{f}(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\bar{g}(p';\varkappa) + K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\bar{h}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = \bar{\tau}(p)$$

in der Form

$$\bar{f}(p;\varkappa) = \frac{\bar{F}(p;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3;\varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)}, \quad \bar{g}(p;\varkappa) = \frac{\bar{G}(p;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3,\varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)},$$

$$\bar{h}(p;\varkappa) = \frac{\bar{H}(p;\varkappa)}{D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3;\varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)}$$

angeben, wobei wieder die jeweils im Zähler stehenden Funktionen in $\varkappa$ ganz transzendent sind und den Integralgleichungen

$$\bar{F}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p,p';\varkappa)\bar{F}(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(p,p';\varkappa)\bar{G}(p';\varkappa) + K_{\xi\zeta}(p,p';\varkappa)\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3;\varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)\bar{\varrho}(p),$$

$$\bar{G}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p,p';\varkappa)\bar{F}(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(p,p';\varkappa)\bar{G}(p';\varkappa) + K_{\eta\zeta}(p,p';\varkappa)\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3;\varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)\bar{\sigma}(p), \tag{121}$$

$$\bar{H}(p;\varkappa) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(S)} \{K_{\zeta\xi}(p,p';\varkappa)\bar{F}(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(p,p';\varkappa)\bar{G}(p';\varkappa) + K_{\zeta\zeta}(p,p';\varkappa)\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma = D^{(m)}\begin{pmatrix}p_1 p_2 p_3\\ q_1 q_2 q_3;\varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)\bar{\tau}(p)$$

genügen.

Mit den beim inneren Problem benutzten Methoden kann alsdann gezeigt werden, daß die Funktionen

$$u(P;\varkappa) = \frac{\bar{u}^*(P;\varkappa) + D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 ; \varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)u_1(P;\varkappa) + l_2(\varkappa)u_2(P;\varkappa) + l_3(\varkappa)u_3(P;\varkappa)\}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 ; \varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)},$$

$$v(P;\varkappa) = \frac{\bar{v}^*(P;\varkappa) + D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 ; \varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)v_1(P;\varkappa) + l_2(\varkappa)v_2(P;\varkappa) + l_3(\varkappa)v_3(P;\varkappa)\}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 ; \varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)}, \tag{122}$$

$$w(P;\varkappa) = \frac{\bar{w}^*(P;\varkappa) + D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 ; \varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)w_1(P;\varkappa) + l_2(\varkappa)w_2(P;\varkappa) + l_3(\varkappa)w_3(P;\varkappa)\}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 ; \varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)}$$

mit

$$\bar{u}^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)}\int\{K_{\xi\xi}(P,p';\varkappa)\,\bar{F}(p';\varkappa) + K_{\xi\eta}(P,p';\varkappa)\,\bar{G}(p';\varkappa) + K_{\xi\zeta}(P,p';\varkappa)\,\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma,$$

$$v^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)}\int\{K_{\eta\xi}(P,p';\varkappa)\,\bar{F}(p';\varkappa) + K_{\eta\eta}(P,p';\varkappa)\,\bar{G}(p';\varkappa) + K_{\eta\zeta}(P,p';\varkappa)\,\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma, \tag{123}$$

$$\bar{w}^*(P;\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(S)}\int\{K_{\zeta\xi}(P,p';\varkappa)\,\bar{F}(p';\varkappa) + K_{\zeta\eta}(P,p';\varkappa)\,\bar{G}(p';\varkappa) + K_{\zeta\zeta}(P,p';\varkappa)\,\bar{H}(p';\varkappa)\}\,d\sigma,$$

die für $\varkappa$-Werte, für welche die Determinanten (104) und $\Delta(\varkappa)$ nicht verschwinden, offenbar den Gleichungen (98) genügen, und deren Randwerte für solche $\varkappa$-Werte $\varrho(p)$, $\sigma(p)$ und $\tau(p)$ sind, stets in einer gewissen Umgebung der Stelle $\varkappa = k = -1$ regulär analytisch in $\varkappa$ sind. Bei dem Beweise beachte man, daß hier als Analogon zu (78) für die Randwerte der Zählerfunktionen in (122)

$$\bar{u}^*(p;\varkappa) + D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 ; \varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)\{l_1(\varkappa)u_1(p;\varkappa) + l_2(\varkappa)u_2(p;\varkappa) - l_3(\varkappa)u_3(p;\varkappa)\} = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ q_1 q_2 q_3 ; \varkappa\end{pmatrix}\Delta(\varkappa)\,\varrho(p)$$

und für die Randwerte ihrer partiellen Ableitungen nach $\varkappa$ als Analogon zu (82)

$$\lim_{P_n^a \to p} \frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i} \Big[\bar{u}^*(P_n^a; \varkappa) + D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3}, \varkappa\Big) \, \Delta(\varkappa) \{ l_1(\varkappa) u_1(P_n^a; \varkappa) + l_2(\varkappa) u_2(P_n^a; \varkappa) + l_3(\varkappa) u_3(P_n^a; \varkappa)\}\Big]$$

$$= \frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i}\Big[D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3}; \varkappa\Big) \, \Delta(\varkappa) \bar{\varrho}(p; \varkappa)\Big] +$$

$$+ \frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i}\Big[D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3}; \varkappa\Big) \, \Delta(\varkappa) \{ l_1(\varkappa) u_1(p; \varkappa) + l_2(\varkappa) u_2(p; \varkappa) + l_3(\varkappa) u_3(p; \varkappa)\}\Big]$$

$$= \frac{\partial^i}{\partial \varkappa^i}\Big[D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3}; \varkappa\Big) \, \Delta(\varkappa) \, \varrho(p)\Big] = \frac{\partial^i D^{(m)}\binom{p_1 p_2 p_3}{q_1 q_2 q_3}; \varkappa\Big) \, \Delta(\varkappa)}{\partial \varkappa^i} \varrho(p)$$

und Entsprechendes für die Zählerfunktionen von $v(P; \varkappa)$ und $w(P; \varkappa)$ gilt.

Schreibt man aber

$$u(P; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{u(P; \varkappa)}{\varkappa + 1} d\varkappa, \quad v(P; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{v(P; -1)}{\varkappa + 1} d\varkappa,$$

(124)

$$w(P; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{w(P; -1)}{\varkappa + 1} d\varkappa,$$

wobei die Integrale über einen in der $\varkappa$-Ebene gelegenen Kreis mit dem Mittelpunkt $\varkappa = -1$ erstreckt werden, der so gewählt ist, daß in seinem Innern und auf seinem Rande eventuell mit Ausnahme des Punktes $\varkappa = -1$ keine Nullstelle von $D^{(m)}(\varkappa)$ mit $\Delta(\varkappa)$ liegt, so folgt

$$u(p; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varrho(p)}{\varkappa + 1} d\varkappa = \varrho(p), \quad v(p; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\sigma(p)}{\varkappa + 1} d\varkappa = \sigma(p),$$

$$w(p; -1) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\tau(p)}{\varkappa + 1} d\varkappa = \tau(p),$$

und man erkennt, daß die Funktionen

$$u(P; -1), \quad v(P; -1), \quad w(P; -1)$$

das Problem (96), (97) lösen, womit Satz 8 bewiesen ist. Die Behauptungen von Satz 9 und 10 lassen sich dann unmittelbar mit den beim inneren Problem benutzten Methoden unter Verwendung von (124) bestätigen[49]).

[49]) Man beachte dabei, daß die partiellen Ableitungen dritter Ordnung von U im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{Qp}^3}$ verschwinden, wie unmittelbar aus (30) zu erkennen ist.

6. Es ist noch der Beweis der Tatsache nachzutragen, daß $\Delta(\varkappa)$ nicht identisch in $\varkappa$ verschwinden kann. Wir werden dazu in mehreren Schritten den Hilfssatz beweisen: *Es gilt* $\Delta(0) \neq 0$.

Ist $f_2(p)$, $g_2(p)$, $h_2(p)$ eine beliebige nicht identisch verschwindende Lösung des Systems (106) für $\varkappa = k = 0$, d. h. liegen drei nicht sämtlich identisch verschwindende Funktionen vor, die den Integralgleichungen

$$f_2(p) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} f_2(p')\,d\sigma = 0,$$

(125)
$$g_2(p) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} g_2(p')\,d\sigma = 0,$$

$$h_2(p) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2} h_2(p')\,d\sigma = 0$$

genügen, so wird behauptet, daß die mit ihnen gebildeten Potentiale der einfachen Schicht

$$u'(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{1}{r_{p'P}} f_2(p')\,d\sigma, \quad v'(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{1}{r_{p'P}} g_2(p')\,d\sigma,$$

(126)
$$w'(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{1}{r_{p'P}} h_2(p')\,d\sigma,$$

die ja bekanntlich im ganzen Raume stetig sind, in R durchweg konstant sein müssen. Es genügt, den Beweis für $u'(P)$ zu führen.

Wir gehen von der für eine beliebige Funktion $u'(P)$, für die in R die Potentialgleichung $\Delta u' = 0$ erfüllt ist, gültigen Integralformel

(127)
$$\iiint\limits_{(R)} \left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial \zeta}\right)^2\right\} d\tau + \iint\limits_{(S)} [u']_S \left[\frac{\partial u'}{\partial n_{p'}}\right]_S d\sigma = 0$$

aus, bei der vorausgesetzt wird, daß das in ihr vorkommende Flächenintegral $\iint\limits_{(S)}$ als $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{(S_n)}$ existiert. Die Gleichung (127) gilt offenbar auch für das Außengebiet R_a, wenn dort $\Delta u' = 0$ ist, und u' im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwindet, während die partiellen Ableitungen erster Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen.

7. Ist nun P_n^i bzw. P_n^a eine in R bzw. in R_a gelegene Punktfolge, die längs n_p gegen p konvergiert, so bestehen für die durch (126) gegebene Funktion $u'(P)$

nach einem bekannten Satz der Potentialtheorie, der auch bei unseren Voraussetzungen über S zutrifft[50]), die Limesrelationen

$$(128)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_p}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=P_n^i} = -2\pi f_2(p)+\iint\limits_{(S)} f_2(p')\frac{\cos(r_{p'p},n_p)}{r_{p'p}^2}\,d\sigma=0,$$

$$(129)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_p}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=P_n^a} = 2\pi f_2(p)+\iint\limits_{(S)} f_2(p')\frac{\cos(r_{p'p},n_p)}{r_{p'p}^2}\,d\sigma.$$

Da die Konvergenz aber in bezug auf die Lage des Punktes p gleichmäßig erfolgt, so gelten diese Limesbeziehungen auch bei beliebiger Annäherung der Punktfolge P_n^i bzw. P_n^a an den Punkt p.

Wählt man nun die Punktfolge P_n^i derart, daß jeder Punkt P_n^i auch Punkt einer Fläche S_n der ganz in R gelegenen Folge von gegen S konvergierenden Approximationsflächen ist und als solcher mit p_n^i bezeichnet werde, so soll bewiesen werden, daß die Limesrelation

$$(130)\quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_{p_n^i}}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^i} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_p}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^i}$$

besteht. Da der rechts stehende Grenzwert existiert, so genügt es zu zeigen, daß

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_{p_n^i}}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma-\frac{\partial}{\partial n_p}\iint\limits_{(S)}\frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^i}\\ &=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(S)} f_2(p')\,\frac{\cos(r_{p'p_n^i},n_p)-\cos(r_{p'p_n^i},n_{p_n^i})}{r_{p'p_n^i}^2}\,d\sigma\\ &=0\end{aligned}$$

ist. Versteht man aber unter s den Teil von S, dessen Projektion auf die Tangentialebene im Punkte p ein Kreis vom Radius ϱ_0 um p ist, und zerlegt man das letzte Flächenintegral $\iint\limits_{(S)}$ in $\iint\limits_{(s)}+\iint\limits_{(S-s)}$, so ist klar, daß die behauptete Limesbeziehung für $\iint\limits_{(S-s)}$ richtig ist. Um sie aber auch für $\iint\limits_{(s)}$ nachzuweisen, schreiben wir, falls mit x, y, z ein im Punkte p lokales Koordinatensystem bezeichnet wird,

$$\begin{aligned}&\cos(r_{p'p_n^i},n_p)-\cos(r_{p'p_n^i},n_{p_n^i})\\ &=\cos(r_{p'p_n^i},x)\{\cos(x,n_p)-\cos(x,n_{p_n^i})\}+\\ &+\cos(r_{p'p_n^i},y)\{\cos(y,n_p)-\cos(y,n_{p_n^i})\}+\\ &+\cos(r_{p'p_n^i},z)\{\cos(z,n_p)-\cos(z,n_{p_n^i})\}.\end{aligned}$$

[50]) Vgl. J. Schauder, l. c., Anm. [14]), insbes. S. 636.

Die Komponenten des Normalvektors im Punkte p bzw. p_n' sind aber durch

$$\left\{ -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\omega}, -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\omega}, \frac{1}{\omega} \right\} \qquad \left(\omega = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}\right)$$

bzw.

$$\left\{ -\frac{\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}}{\omega_n}, -\frac{\frac{\partial \varphi_n}{\partial y}}{\omega_n}, \frac{1}{\omega_n} \right\} \qquad \left(\omega_n = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\right)^2}\right)$$

gegeben, wobei z. B.

$$\frac{\partial \varphi(p)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G(p)}{\partial x}}{\frac{\partial G(p)}{\partial z}}, \quad \frac{\partial \varphi_n(p)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial G(p_n^i)}{\partial x}}{\frac{\partial G(p_n^i)}{\partial z}} \qquad \left(\frac{\partial G(p)}{\partial z} \neq 0, \frac{\partial G(p_n^i)}{\partial z} \neq 0\right)$$

ist, wenn man unter $G(x, y, z)$ die bereits im § 4, Abschnitt 2 zur Definition der Flächen S_n benutzte Greensche Funktion für das Gebiet R versteht. Da nun nach bekannten Sätzen über Potentialfunktionen bei unseren Voraussetzungen über die Berandung die partiellen Ableitungen erster Ordnung von $G(x, y, z)$ in $R + S$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen [51]), so erhalten wir die Abschätzung

$$|\cos(r_{p'p_n^i}, n_p) - \cos(r_{p'p_n^i}, n_{p_n^i})| < K r_{pp_n^i}^{\lambda}.$$

Für das abzuschätzende Integral ergibt sich also gleichmäßig für alle Punkte p von S die obere Schranke

$$\iint_{(s)} \Big| \leqq K r_{pp_n^i}^{\lambda} \iint_{(s)} \frac{1}{r_{p'p_n^i}^2} \, d\sigma.$$

Der rechts stehende Ausdruck muß für $n \to \infty$ gegen Null gehen. Denn ist für den Augenblick der Punkt p_n^i auf der Normalen im Punkte p gelegen und ist $h_n = r_{pp_n^i}$, so gilt nach (2)

$$r_{pp_n^i}^{\lambda} \iint_{(s)} \frac{1}{r_{p'p_n^i}^2} \, d\sigma = h_n^{\lambda} \iint_{(s)} \left| \frac{1}{t'^2 + h_n^2} + 0\left[\frac{1}{(t'^2 + h_n^2)^{1-\frac{\lambda}{2}}}\right] \right| d\sigma$$

$$= h_n^{\lambda} \left\{ \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\varrho_0} \frac{\varrho \, d\varrho}{\varrho^2 + h_n^2} + 0[1] \right|$$

$$= h_n^{\lambda} \left| \pi (\log(\varrho_0^2 + h_n^2) - \log h_n^2) + 0[1] \right|.$$

[51]) Vgl. J. Schauder, l. c., Anm. [14]), insbes. S. 635, und O. D. Kellog, l. c., Anm. [15]), insbes. S. 508.

Nach der bereits mehrfach benutzten Schlußweise muß dann aber auch der Ausdruck bei beliebiger Annäherung an den Punkt p gegen Null gehen.

Im Anschluß an (129) lassen sich entsprechende Betrachtungen anstellen, wenn man für die P_n^a eine Folge von Punkten wählt, die auf den in R_a gelegenen Approximationsflächen S_n^a liegen, so daß

$$(131)\qquad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_{p_n^a}}\int\limits_{(S)}\int \frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^a} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial}{\partial n_p}\int\limits_{(S)}\int \frac{f_2(p')}{r_{p'P}}\,d\sigma\right]_{P=p_n^a}$$

ist.

N. B. Mit Sätzen aus der Theorie des Potentials der einfachen Schicht könnte man zeigen, daß die durch (125) und (126) gegebene Funktion $u'(P)$ in $R+S$ stetige erste partielle Ableitungen besitzt [52]), so daß (130) auch unmittelbar aus

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial n_{p_n^i}}\right]_{P=p_n^i}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial \xi}\right]_{P=p_n^i}\cos(\xi, n_{p_n^i}) + \left[\frac{\partial u'(P)}{\partial \eta}\right]_{P=p_n^i}\cos(\eta, n_{p_n^i}) + \left[\frac{\partial u'(P)}{\partial \zeta}\right]_{P=p_n^i}\cos(\zeta, n_{p_n^i})\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial u'(P)}{\partial \xi}\right]_{P=p_n^i}\cos(\xi, n_p) + \left[\frac{\partial u'(P)}{\partial \eta}\right]_{P=p_n^i}\cos(\eta, n_p) + \left[\frac{\partial u'(P)}{\partial \zeta}\right]_{P=p_n^i}\cos(\zeta, n_p)\right\}$$

folgen würde.

8. Wendet man nun (127) zunächst auf den Bereich $R_n + S_n$ an, so erhält man bei Beachtung von (130) und (128), wenn man zur Grenze $n\to\infty$ übergeht, daß in ganz R

$$(132)\qquad u'(P) = a',\quad v'(P) = b',\quad w'(P) = c'$$

sein muß, wo a', b', c' drei Konstanten sind, von denen wir zunächst zeigen wollen, daß sie nicht sämtlich verschwinden können.

Aus $a' = b' = c' = 0$ würde nämlich, da die Funktionen $u'(P)$, $v'(P)$, $w'(P)$ im ganzen Raume stetig sind,

$$(133)\qquad \lim_{n\to\infty} u'(p_n^a) = 0,\quad \lim_{n\to\infty} v'(p_n^a) = 0,\quad \lim_{n\to\infty} w'(p_n^a) = 0$$

folgen. Da jedoch nach (131) und (129) der in (131) auf der linken Seite stehende Grenzwert existiert und die Funktionen $u'(P)$, $v'(P)$, $w'(P)$ im Unendlichen

---

[52]) Vgl. J. Schauder, l. c., Anm. [14]), insbes. S. 635—640.

wie $\frac{1}{r_{OP}}$ verschwinden, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen, so folgt aus dem Integralsatz (127), wenn man ihn zunächst auf den Bereich $R_n^a + S_n^a$ anwendet, und dann zur Grenze $n \to \infty$ übergeht und (133) beachtet, daß im Gebiet R_a

$$u'(P) = 0, \quad v'(P) = 0, \quad w'(P) = 0$$

und damit ebendort

$$\frac{\partial u'(P)}{\partial n_p} = 0, \quad \frac{\partial v'(P)}{\partial n_p} \equiv 0, \quad \frac{\partial w'(P)}{\partial n_p} \equiv 0$$

sein müßte. Aus (129) könnte man dann aber auf

$$f_2(p) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} f_2(p') \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2}\, d\sigma = 0,$$

$$g_2(p) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} g_2(p') \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2}\, d\sigma = 0,$$

$$h_2(p) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(S)} h_2(p') \frac{\cos(r_{p'p}, n_p)}{r_{p'p}^2}\, d\sigma = 0$$

schließen. Daraus würde jedoch wegen (125) im Widerspruch zur Annahme

$$f_2(p) \equiv 0, \quad g_2(p) \equiv 0, \quad h_2(p) \equiv 0$$

folgen.

9. Wählt man nunmehr für $f_2(p)$, $g_2(p)$, $h_2(p)$ der Reihe nach die drei linear unabhängigen Lösungssysteme (107) von (106) mit $\varkappa = 0$, so sind die mit ihnen gebildeten Funktionen (126), die bzw. mit u_1', v_1', w_1', u_2', v_2', w_2', u_3', v_3', w_3' bezeichnet seien nach dem vorhergehenden Abschnitt in R sämtlich konstant:

$$\begin{aligned} u_1' &= a_1, \quad v_1' = b_1, \quad w_1' = c_1, \\ u_2' &= a_2, \quad v_2' = b_2, \quad w_2' = c_2, \\ u_3' &= a_3, \quad v_3' = b_3, \quad w_3' = c_3. \end{aligned} \tag{134}$$

Es muß dann

$$D = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{135}$$

sein. Denn andernfalls würde es drei Zahlen $k_1, k_2, k_3 \neq 0, 0, 0$ derart geben, daß

$$\begin{aligned} k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 &= 0, \\ k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 &= 0, \\ k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 &= 0 \end{aligned}$$

ist. Bildet man dann mit

$$\begin{aligned} f_2 &= k_1 f_{21} + k_2 f_{22} + k_3 f_{23}, \\ g_2 &= k_1 g_{21} + k_2 g_{22} + k_3 g_{23}, \\ h_2 &= k_1 h_{21} + k_2 h_{22} + k_3 h_{23} \end{aligned} \tag{136}$$

die Funktionen (126), so muß für sie offenbar in R

$$u' \equiv k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0, \quad v' \equiv k_1 b_1 + k_2 b_2 + k_3 b_3 = 0,$$
$$w' \equiv k_1 c_1 + k_2 c_2 + k_3 c_3 = 0$$

sein. Nach dem im vorhergehenden Abschnitt benutzten Schluß würde also

$$f_2(p) \equiv 0, \quad g_2(p) \equiv 0, \quad h_2(p) \equiv 0$$

folgen, was jedoch gemäß (136) im Widerspruch zu der Bedeutung von f_{21}, f_{22}, f_{23}, g_{21}, g_{22}, g_{23}, h_{21}, h_{22}, h_{23} zu der Aussage führt, daß diese Lösungssysteme von (106) linear abhängig wären.

10. Beachtet man nun, daß für die durch (119) gegebenen Funktionen

$$\begin{aligned} u_1(p;0) &= \frac{1}{2r_{p0}}, & v_1(p;0) &= 0, & w_1(p;0) &= 0, \\ u_2(p;0) &= 0, & v_2(p;0) &= \frac{1}{2r_{p0}}, & w_2(p;0) &= 0, \\ u_3(p;0) &= 0, & v_3(p;0) &= 0, & w_3(p;0) &= \frac{1}{2r_{p0}} \end{aligned}$$

gilt, und daß man infolgedessen wegen (134) für die Elemente der Determinante

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}$$

in der ersten Zeile

$$\delta_{11} - \iint_{(S)} \{f_{21}(p';0)u_1(p';0) + g_{21}(p';0)v_1(p';0) + h_{21}(p';0)w_1(p';0)\}d\sigma = \pi a_1,$$
$$\delta_{12} - \iint_{(S)} \{f_{21}(p';0)u_2(p';0) + g_{21}(p';0)v_2(p';0) + h_{21}(p';0)w_2(p';0)\}d\sigma = \pi b_1,$$
$$\delta_{13} - \iint_{(S)} \{f_{21}(p';0)u_3(p';0) + g_{21}(p';0)v_3(p';0) + h_{21}(p';0)w_3(p';0)\}d\sigma = \pi c_1$$

und entsprechende Werte für δ_{21}, δ_{22}, δ_{23}, δ_{31}, δ_{32}, δ_{33} erhält, so ist unmittelbar aus (135) zu ersehen, daß

$$\Delta(0) = \pi^3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ist, womit der im Abschnitt 6 dieses Paragraphen formulierte Hilfssatz bewiesen ist.

§ 6.

Das innere Problem in der Ebene.

1. Es handelt sich in diesem Paragraphen darum, den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz zu beweisen:

Hauptsatz III. *Genügt die Randkurve S des einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Gebietes R den in § 1 genannten Voraussetzungen, und sind die auf S definierten Funktionen ϱ und σ dort stetig und genügen sie der Relation*

$$\int_{(S)} \{\varrho(p')\cos(n'_p, \eta) - \sigma(p')\cos(n'_p, \xi)\}\, ds = 0, \tag{137}$$

dann gibt es (bis auf eine additive Konstante) genau eine in R biharmonische Funktion U, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R + S$ stetig sind und auf S bzw. mit ϱ und σ übereinstimmen.

Existiert eine biharmonische Funktion mit den verlangten Eigenschaften, so gilt mit

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = \Delta U \tag{138}$$

offensichtlich in R

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \Delta\vartheta = 0 \tag{139}$$

und

$$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma, \tag{140}$$

und umgekehrt folgt aus dem Bestehen von (139), (140) und (137) die Existenz einer Funktion U, für die die Gleichungen (138) erfüllt sind, so daß sie das ursprüngliche Problem löst.

Die Bedingung (137) ist, damit das Problem überhaupt eine Lösung hat, wie man aus dem Gaussschen Satz erkennt, sicherlich notwendig, sie erweist sich aber auch zusammen mit den anderen Voraussetzungen als hinreichend. Indem wir uns daher lediglich mit dem Problem (139), (140) zusammen mit (137) beschäftigen, zeigen wir zunächst den

Satz 11. *Sind die Funktionen ϱ und σ auf S stetig und genügen sie der Relation* (137), *so existiert eine Lösung des Problems* (139), (140).

Den Beweisgang, für den die im räumlichen Fall benutzten Methoden versagen, können wir unter Ausfüllung einiger Lücken und Verallgemeinerung auf die von uns zugrunde gelegten Voraussetzungen über S einer Arbeit von G. Lauricella[53]) entnehmen.

---

[53]) G. Lauricella, l. c., Anm. [5]).

2. Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$K_{\xi\xi}(P, p) = \left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\right)^2 \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} = \frac{\cos^2(r_{pP}, \eta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}},$$

$$(141)\quad K_{\xi\eta}(P, p) = K_{\eta\xi}(P, p) = -\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{pP}}{\partial \eta}\frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{pP}}\right)}{\partial n_p} = -\frac{\cos(r_{pP}, \xi)\cos(r_{pP}, \eta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}},$$

$$K_{\eta\eta}(P, p) = \left(\frac{\partial r_{pP}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{pP}}\right)}{d n_p} = \frac{\cos^2(r_{pP}, \xi)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}}$$

betrachte man das inhomogene System von Fredholmschen Integralgleichungen

$$(142)\quad \begin{aligned} f(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g(p')\}ds &= \varrho(p), \\ g(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f(p') + K_{\eta\eta}(p, p')g(p')\}ds &= \sigma(p). \end{aligned}$$

Von dem zu dem entsprechenden homogenen Gleichungssystem

$$(143)\quad \begin{aligned} f_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g_1(p')\}ds &= 0, \\ g_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p')g_1(p')\}ds &= 0 \end{aligned}$$

gehörigen assoziierten Gleichungssystem

$$(144)\quad \begin{aligned} f_2(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p', p)f_2(p') + K_{\xi\eta}(p', p)g_2(p')\}ds &= 0, \\ g_2(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p', p)f_2(p') + K_{\eta\eta}(p', p)g_2(p')\}ds &= 0 \end{aligned}$$

kann man durch direkte Rechnung zeigen, daß es die Lösung

$$f_2(p) = \cos(n_p, \eta), \quad g_2(p) = -\cos(n_p, \xi)$$

besitzt. Denn es wird nach (50) und (51)

$$\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\xi\xi}(p', p)\cos(n'_p, \eta) - K_{\xi\eta}(p', p)\cos(n'_p, \xi)\}\,ds$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\left\{\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\cos(n_{p'}, \eta) + \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi}\cos(n_{p'}, \xi)\right\}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_p}\,ds$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial n_{p'}}\frac{1}{r_{p'p}}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial n_p}\,ds = -\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial n_p}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\left\{\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi}\cos(n_p, \xi) + \frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\cos(n_p, \eta)\right\}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds$$

$$= -\frac{2}{\pi}\cos(n_p, \xi)\int_{(S)}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds -$$

$$-\frac{2}{\pi}\cos(n_p, \eta)\int_{(S)}\left(\frac{\partial r_{p'p}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'p}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds$$

$$= -\cos(n_p, \eta)$$

und ebenso

$$\frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\eta\xi}(p', p)\cos(n_{p'}, \eta) - K_{\eta\eta}(p', p)\cos(n_{p'}, \xi)\}\,ds = \cos(n_p, \xi).$$

Damit besitzt auch (143) mindestens eine nicht triviale Lösung $f_1(p)$, $g_1(p)$, von der man mit denselben Betrachtungen wie in § 4, Abschnitt 6 unter Verwendung der in § 3, Abschnitt 12 gewonnenen ebenen Analoga der Hilfssätze 2 bis 6 von § 3 zeigen kann, daß sie eine Tangentialableitung besitzen, die auf S einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Kurvenexponenten λ genügt.

In den nächsten Abschnitten wollen wir in mehreren Schritten nachweisen, daß jede weitere Lösung $f_1(p)$, $g_1(p)$ von (143) ein Vielfaches von $f_1(p)$, $g_1(p)$ sein muß.

3. Als direkte Folgerung aus einer Greenschen Formel läßt sich für eine im Gebiet R existierende beliebige Lösung u, v von (139) der Integralsatz

$$(145)\quad \iint_{(R)}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2\right\}d\xi\,d\eta +$$

$$+\int_{(S)}\{[u]_S X_{u,v}(p', p') + [v]_S Y_{u,v}(p', p')\}\,ds = 0$$

ableiten, wenn man zu der durch (138) in R definierten Potentialfunktion ϑ eine konjugierte Potentialfunktion χ durch

$$(146)\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} = \frac{\partial \chi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = -\frac{\partial \chi}{\partial \xi}$$

einführt und

(147)

$$X_{u,v}(P,p) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(P)}{\partial \xi} - \frac{\partial v(P)}{\partial \eta}\right)\cos(n_p,\xi) + \left(\frac{\partial u(P)}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\chi(P)\right)\cos(n_p,\eta),$$

$$Y_{u,v}(P,p) = \left(\frac{\partial v(P)}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\chi(P)\right)\cos(n_p,\xi) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v(P)}{\partial \eta} - \frac{\partial u(P)}{\partial \xi}\right)\cos(n_p,\eta)$$

setzt, und wenn von dem auf der linken Seite in (145) stehenden Kurvenintegral vorausgesetzt wird, daß es als $\lim_{n\to\infty}\int_{(S_n^i)}$ existiert, wobei die S_n^i, analog wie beim räumlichen Fall, eine Folge von in R gelegenen, durch die zu R gehörige Greensche Funktion gegebenen, gegen S konvergierenden analytischen Approximationskurven sind. Die Formel (145) gilt auch für das Außengebiet R_a, falls die Funktionen u und v den Gleichungen (139) genügen, im Unendlichen beschränkt sind, und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung dort wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden, und falls weiterhin das Kurvenintegral als $\lim_{n\to\infty}\int_{S_n^a}$ existiert.

Den Beweis von (145) erbringen wir, indem wir für zwei beliebige im Gebiet R existierende Lösungen u, v und $\bar{u}$, $\bar{v}$ von (139) die Richtigkeit des für spätere Zwecke benötigten allgemeineren Integralsatzes

$$(148)\quad \iint_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\right)\right\} d\xi\, d\eta +$$

$$+ \int_{(S)}\{[u]_S X_{\bar{u},\bar{v}}(p',p') + [v]_S Y_{\bar{u},\bar{v}}(p',p')\}\, ds = 0$$

aufzeigen, wobei das Kurvenintegral $\int_{(S)}$ wieder als $\lim_{n\to\infty}\int_{(S_n^i)}$ existieren soll. Ein entsprechender Integralsatz gilt für das Außengebiet R_a.

Das links auftretende Flächenintegral zerlege man nämlich in die beiden Integrale

$$\frac{1}{2}\iint_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\right\} d\xi\, d\eta$$

und

$$\frac{1}{2}\iint_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right\} d\xi\, d\eta.$$

Für das erste Integral findet man nach einer Greenschen Formel

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\right\}d\xi\,d\eta$$

$$= -\frac{1}{2}\iint\limits_{(R)}\{u\,\Delta\bar{u}+v\,\Delta\bar{v}\}\,d\xi\,d\eta -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{(S)}\left\{u\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\cos(n_{p'},\xi)+\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\cos(n_{p'},\eta)\right)+\right.$$

$$\left.+\,v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\cos(n_{p'},\xi)+\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\cos(n_{p'},\eta)\right)\right\}ds.$$

Da nun

$$\Delta u - \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} = 0, \quad \Delta \bar{v} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = 0$$

ist, so erhält man nach dem Gaussschen Integralsatz

$$\iint\limits_{(R)}\{u\,\Delta u + v\,\Delta v\}\,d\xi\,d\eta = \iint\limits_{(R)}\left\{u\left(\Delta u - \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi}\right)+v\left(\Delta v - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}\right)\right\}d\xi\,d\eta +$$

$$+\iint\limits_{(R)}\left\{u\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \eta}-v\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\right\}d\xi\,d\eta = \int\limits_{(S)}\{-u\,\chi\cos(n_{p'},\eta)+v\,\bar{\chi}\cos(n_{p'},\xi)\}\,ds,$$

wenn man noch beachtet, daß

$$\bar{\chi}\frac{\partial u}{\partial \eta}-\bar{\chi}\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$$

ist. Man hat also insgesamt für das erste Integral

$$(149)\quad \frac{1}{2}\iint\limits_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\right\}d\xi\,d\eta$$

$$= \int\limits_{(S)}\left\{u\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\cos(n_{p'},\xi)+\left(\frac{1}{2}\bar{\chi}-\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right)\cos(n_{p'},\eta)\right]+\right.$$

$$\left.+\,v\left[-\left(\frac{1}{2}\chi+\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\right)\cos(n_{p'},\xi)-\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\cos(n_{p'},\eta)\right]\right\}ds.$$

Für das zweite Integral kann man aber bei Benutzung des Gaussschen Integralsatzes

$$(150)\quad \frac{1}{2}\iint\limits_{(R)}\left\{\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}+\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}-\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right\}d\xi\,d\eta$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{(R)}\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left(u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right)-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(u\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(v\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\right)-\frac{\partial}{\partial \eta}\left(v\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\right\}d\xi\,d\eta$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{(S)}\left\{u\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\cos(n_{p'},\eta)-\frac{\partial v}{\partial \eta}\cos(n_{p'},\xi)\right)+\right.$$

$$\left.+\,v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi}\cos(n_{p'},\xi)-\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi}\cos(n_{p'},\eta)\right)\right\}d\xi\,d\eta$$

schreiben, wenn man berücksichtigt, daß

$$u\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - u\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad v\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \xi^2} - v\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

ist. Mit (149) und (150) ist aber (148) bewiesen.

Subtrahiert man die durch Vertauschung von u mit $\bar{u}$ bzw. von v mit $\bar{v}$ aus (148) erhaltene Gleichung von (148), so findet man die für spätere Zwecke benötigte Relation

$$\int_{(S)} \{[u]_S X_{\bar{u},\bar{v}}(p',p') + [v]_S Y_{\bar{u},\bar{v}}(p',p') - [\bar{u}]_S X_{u,v}(p',p') - [\bar{v}]_S Y_{u,v}(p',p')\}\, ds = 0, \tag{151}$$

wobei das Integral als $\lim_{n\to\infty} \int_{(S_n^i)}$ zu verstehen ist. Geht man von dem (148) entsprechenden Integralsatz für das Gebiet R_a aus, so gelangt man durch dasselbe Vorgehen ebenfalls zu einer Relation der Form (151) mit dem einzigen Unterschied, daß jetzt das Kurvenintegral $\int_{(S)}$ als $\lim_{n\to\infty} \int_{(S_n^a)}$ zu verstehen ist.

4. Mit Hilfe der Funktionen $f_1(p)$ und $g_1(p)$ bilde man nunmehr die folgenden Lösungen von (139)

$$\begin{aligned} u_1(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P,p')\, f_1(p') + K_{\xi\eta}(P,p')\, g_1(p')\}\, ds, \\ v_1(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P,p')\, f_1(p') + K_{\eta\eta}(P,p')\, g_1(p')\}\, ds, \end{aligned} \tag{152}$$

für die wegen (55), (57) und (143) die Limesrelationen

$$\lim_{n\to\infty} u_1(P_n^i) = u_1^i(p) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} v_1(P_n^i) = v_1^i(p) = 0 \tag{153}$$

bestehen. Für diese Funktionen ist nun

$$\vartheta_1 = \frac{\partial u_1(P)}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1(P)}{\partial \eta} = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S)} f_1(p')\, \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S)} g_1(p')\, \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds, \tag{154}$$

und damit kann im Gebiet R oder im Gebiet R_a gemäß (146)

$$\chi_1 = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S)} f_1(p')\, \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S)} g_1(p')\, \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\, ds \tag{155}$$

gesetzt werden.

Bezeichnet man die Tangentialrichtung im Kurvenpunkt p von S, die zusammen mit der Normalenrichtung n_p dieselbe Orientierung wie das ξ, η-System hat, mit t_p, und beachtet man, daß

$$\frac{\partial K_{\xi\xi}(P,p)}{\partial \eta} = \frac{\partial K_{\xi\eta}(P,p)}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial K_{\xi\eta}(P,p)}{\partial \eta} = \frac{\partial K_{\eta\eta}(P,p)}{\partial \xi}$$

ist, so ergeben die Ausdrücke (147) für die Funktionen $u = u_1$, $v = v_1$ wegen (154) und (155)

$$X_{u_1,v_1}(P,p) = \left(\frac{1}{2}\vartheta_1 - \frac{\partial v_1}{\partial \eta}\right)\cos(n_p,\xi) + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\chi_1\right)\cos(n_p,\eta)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S)} f_1(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S)} g_1(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \right.$$

$$+ 2\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S)} f_1(p')\,\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\,\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds -$$

$$\left. - 2\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S)} g_1(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds\right\}\cos(n_p,\xi) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left\{- 2\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S)} f_1(p')\,\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\,\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \right.$$

$$- 2\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S)} g_1(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds +$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S)} f_1(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds - \frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S)} g_1(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds\right\}\cos(n_p,\eta)$$

und daher

$$(156)\qquad X_{u_1,v_1}(P,p) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial n_p}\int_{(S)} f_1(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds -$$

$$- \frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial t_p}\int_{(S)} g_1(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds -$$

$$- \frac{2}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial t_p}\int_{(S)} f_1(p')\,\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\,\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial t_p}\int_{(S)} g_1(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds.$$

Ebenso erhält man

$$(157)\quad Y_{u_1,v_1}(P,p) = \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\chi_1\right)\cos(n_p,\xi) + \left(\frac{1}{2}\vartheta_1 - \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\right)\cos(n_p,\eta)$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial n_p}\int\limits_{(S)} g_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\limits_{(S)} f_1(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds -$$

$$- \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\limits_{(S)} f_1(p')\left(\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\right)^2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t_p}\int\limits_{(S)} g_1(p')\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{p'P}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds.$$

5. Da aber die Funktionen $f_1(p)$ und $g_1(p)$ auf S eine Tangentialableitung besitzen, die einer gleichmäßigen H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügt, so sind sowohl $\frac{\partial u_1}{\partial \xi}, \frac{\partial u_1}{\partial \eta}, \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \frac{\partial v_1}{\partial \eta}, \vartheta_1, \chi_1$ als auch die Ausdrücke (156) und (157) in $R + S$ und in $R_a + S$ stetig, und aus (60) und (61) erkennt man unmittelbar, daß die letzteren sich auch stetig verhalten, wenn der Punkt P den Flächenpunkt p passiert.

Wendet man daher (145) auf den ganz in R gelegenen Bereich $R_n^i + S_n^i$ an und läßt n unbeschränkt wachsen, so folgt bei Beachtung von (153), daß in R

$$u_1(P) \equiv 0, \quad \vartheta_1(P) \equiv 0$$

und damit

$$\vartheta_1(P) \equiv 0$$

und also

$$\chi_1(P) = c$$

sein muß, wobei c eine Konstante ist. In ganz R gilt infolgedessen

$$X_{u_1,v_1}(P,p) = -\tfrac{1}{2}c\cos(n_p,\eta),$$
$$Y_{u_1,v_1}(P,p) = \tfrac{1}{2}c\cos(n_p,\xi).$$

Nach der eben gemachten Bemerkung über das Verhalten der Ausdrücke (156) und (157) bei Annäherung an einen Randpunkt von S folgt dann aber für eine im Gebiet R_a gelegene Punktfolge P_n^a, die gegen p konvergiert,

$$\lim_{n\to\infty} X_{u_1,v_1}(P_n^a,p) = -\tfrac{1}{2}c\cos(n_p,\eta),$$
$$\lim_{n\to\infty} Y_{u_1,v_1}(P_n^a,p) = \tfrac{1}{2}c\cos(n_p,\xi).$$

Hieraus erkennt man, daß die Konstante c ungleich Null sein muß. Denn wenn r_{OP} unbeschränkt wächst, so gehen $u_1(P)$ und $v_1(P)$ wie $\frac{1}{r_{OP}}$ gegen Null, während ihre ersten partiellen Ableitungen und χ_1 wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden. Man kann also (145) auf den Bereich $R_n^a + S_n^a$ anwenden. Wäre also $c \neq 0$, so erhielte man im Limes $n \to \infty$, das in R_a

$$u_1(P) \equiv 0, \quad v_1(P) \equiv 0$$

sein müßte. Da aber wegen (56), (58) und (143)

$$\lim_{n \to \infty} u_1(P_n^a) - u_1^a(p) = -f_1(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')\, f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p')\, g_1(p')\}\, ds = -2 f_1(p),$$

$$\lim_{n \to \infty} v_1(P_n^a) - v_1^a(p) = -g_1(p) - \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')\, f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p')\, g_1(p')\}\, ds = -2 g_1(p)$$

ist, so würde im Widerspruch zu der Bedeutung der Funktionen $f_1(p)$, $g_1(p)$

$$f_1(p) \equiv 0, \quad g_1(p) \equiv 0$$

folgen.

6. Nehmen wir nun an, daß die homogenen Gleichungen (143) neben $f_1(p)$, $g_1(p)$ die Funktionen $\bar{f}_1(p)$, $\bar{g}_1(p)$ als nicht identisch verschwindende Lösung besitzen. Bildet man mit ihnen analog zu (152) die Lösungsfunktionen $\bar{u}_1(P)$, $\bar{v}_1(P)$ von (139), so muß aus den gleichen Gründen wie eben in R

$$X_{\bar{u}_1, \bar{v}_1}(P, p) = -\tfrac{1}{2}\, \bar{c} \cos(n_p, \eta),$$
$$Y_{\bar{u}_1, \bar{v}_1}(P, p) = \tfrac{1}{2}\, \bar{c} \cos(n_p, \xi)$$

sein, wo $\bar{c}$ eine nichtverschwindende Konstante ist.

Wählt man nun eine weitere Konstante k so, daß

$$c + k\bar{c} = 0$$

ist, und bestimmt für die Lösungsfunktionen

$$\bar{\bar{f}}_1 = f_1 + k\bar{f}_1, \quad \bar{\bar{g}}_1 = g_1 + k\bar{g}_1$$

die zu (152) analogen Lösungsfunktionen $\bar{\bar{u}}_1(P)$, $\bar{\bar{v}}_1(P)$ von (139), so gilt offensichtlich in ganz R

$$X_{\bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{v}}_1}(P, p) = -\tfrac{1}{2}\, (c + k\bar{c}) \cos(n_p, \eta) = 0,$$
$$Y_{\bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{v}}_1}(P, p) = \tfrac{1}{2}\, (c + k\bar{c}) \cos(n_p, \xi) = 0.$$

Mit dem Schlußverfahren am Ende des letzten Abschnitts erkennt man dann aber, daß

$$\bar{\bar{f}}_1 = 0, \quad \bar{\bar{g}}_1 = 0$$

sein muß, so daß in der Tat eine beliebige Lösung $\bar{f}_1(p)$, $\bar{g}_1(p)$ von (143) ein Vielfaches der Lösung $f_1(p)$, $g_1(p)$ sein muß.

7. Da somit das assoziierte Gleichungssystem (144) die Funktionen

$$f_2(p) = \cos(n_p, \eta), \quad g_2(p) = -\cos(n_p, \xi)$$

als einzige linear unabhängige Lösung besitzt, so lautet die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das inhomogene System (142) eine Lösung besitzt:

$$\int_{(S)} \{\varrho(p') \cos(n_{p'}, \eta) - \sigma(p') \cos(n_{p'}, \xi)\}\, ds = 0.$$

Erfüllen die gegebenen Randfunktionen diese Bedingung, so existiert also eine Lösung $f(p)$, $g(p)$ von (142).

Die mit ihnen gebildeten Funktionen

$$\begin{aligned} u(P) &= \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p')\, f(p') + K_{\xi\eta}(P, p')\, g(p')\}\, ds, \\ v(P) &= \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p')\, f(p') + K_{\eta\eta}(P, p')\, g(p')\}\, ds \end{aligned} \tag{158}$$

lösen alsdann das Problem (139), (140), womit der Nachweis von Satz 11 erbracht ist.

8. Der Hauptsatz III ist alsdann in seinem vollen Umfange zugleich mit dem folgenden Eindeutigkeitssatz bewiesen:

Satz 12. *Sind die Funktionen ϱ und σ auf S stetig und genügen sie der Relation* (137), *so kann es höchstens eine Lösung des Problems* (139), (140) *geben.*

Den Beweis erbringen wir in mehreren Schritten, indem wir mit dem Hilfssatz beginnen: *Das durch Einführung eines Parameters $\varkappa$ ergänzte homogene Integralgleichungssystem* (143)

$$\begin{aligned} f_1(p) + \varkappa \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')\, f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p')\, g_1(p')\}\, ds &= 0, \\ g_1(p) + \varkappa \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')\, f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p')\, g_1(p')\}\, ds &= 0 \end{aligned} \tag{159}$$

besitzt für $\varkappa = -1$ die Lösung

$$f_1(p) = a_1 \xi(p) + b_1, \quad g_1(p) = a_1 \eta(p) + c_1, \tag{160}$$

wenn a_1, b_1, c_1 beliebige Konstanten sind.

Beweis. Ist $P_1 = (\xi_1, \eta_1)$ ein beliebiger Punkt im Innern von R, der der Mittelpunkt eines ganz in R gelegenen Kreises S_0 sei, und benutzt man die in dem von S und S_0 berandeten Gebiet R_0 definierten Lösungsfunktionen

$$\bar{u}(P) = -\log\frac{1}{r_{PP_1}} + \left(\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\right)^2, \quad \bar{v}(P) = \frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}$$

von (139), für die

$$\bar{\vartheta} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = -2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial \xi}; \quad \bar{\chi} = 2\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial \eta}$$

und also

$$X_{\bar{u},\bar{v}}(P, p) = -2\left(\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\right)^2 \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial n_p},$$

$$Y_{\bar{u},\bar{v}}(P, p) = 2\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial n_p}$$

zu setzen ist, so liefert die Formel (151) bei aus der Potentialtheorie bekanntem Vorgehen, wenn man die Kreisperipherie S_0 auf P_1 zusammenzieht,

$$\begin{aligned} u(\xi_1, \eta_1) &= \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \{-[u]_S X_{\bar{u},\bar{v}}(p', p') - [v]_S Y_{\bar{u},\bar{v}}(p', p') + \\ &\qquad + [\bar{u}]_S X_{u,v}(p', p') + [\bar{v}]_S Y_{u,v}(p', p')\}\, ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{(S)} \{[u]_S K_{\xi\xi}(P_1, p') + [v]_S K_{\xi\eta}(P_1, p')\}\, ds + \\ &\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \{[\bar{u}]_S X_{u,v}(p', p') + [\bar{v}]_S Y_{u,v}(p', p')\}\, ds. \end{aligned} \tag{161}$$

Ebenso findet man bei Benutzung der in dem von S und S_0 berandeten Gebiet definierten Lösungsfunktionen

$$\bar{\bar{u}}(P) = \frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}, \quad \bar{\bar{v}}(P) = -\log\frac{1}{r_{PP_1}} + \left(\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\right)^2$$

von (139), für die

$$X_{\bar{\bar{u}},\bar{\bar{v}}}(P, p) = 2\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \eta}\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial n_p},$$

$$Y_{\bar{\bar{u}},\bar{\bar{v}}}(P, p) = -2\left(\frac{\partial r_{PP_1}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{PP_1}}\right)}{\partial n_p}$$

ist,

$$v(\xi_1, \eta_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \{- [u]_S X_{u,v}^{\bar{=}\,\bar{=}}(p', p') - [v]_S Y_{u,v}^{-\,\bar{=}}(p', p') + \\ + [\bar{\bar{u}}]_S X_{u,v}(p', p') + [\bar{\bar{v}}]_S Y_{u,v}(p', p')\}\, ds$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{(S)} \{[u]_S K_{\eta\xi}(P_1, p') + [v]_S K_{\eta\eta}(P_1, p')\}\, ds + \tag{162}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \{[\bar{\bar{u}}] X_{u,v}(p', p') + [\bar{\bar{v}}]_S Y_{u,v}(p', p')\}\, ds.$$

Wählt man nunmehr die Lösungsfunktionen

$$u(\xi, \eta) = a_1\xi + b_1, \quad v(\xi, \eta) = a_1\eta + c_1$$

von (139), so ist

$$X_{u,v}(P, p) = -d\cos(n_p, \eta), \quad Y_{u,v}(P, p) = d\cos(n_p, \xi),$$

wenn d eine Konstante bedeutet. Dann muß aber nach dem Gaussschen Integralsatz

$$\int_{(S)} \{[\bar{\bar{u}}]_S X_{u,v}(p', p') + [\bar{\bar{v}}]_S Y_{u,v}(p', p')\}\, ds$$

$$= -d\int_{(S)} \{[\bar{\bar{u}}]_S \cos(n_{p'}, \eta) - [\bar{\bar{v}}]_S \cos(n_{p'}, \xi)\}\, ds = 0$$

und ebenso

$$\int_{(S)} \{[u]_S X_{u,v}(p', p') + [v]_S Y_{u,v}(p', p')\}\, ds = 0$$

sein, da $u(P)$ und $v(P)$ im Punkte P_1 von R nur eine logarithmische Singularität haben, während $v(P)$ und $u(P)$ in ganz R stetig sind. Somit ergeben (161) und (162), wenn man beachtet, daß P_1 ein beliebiger Punkt von R war:

$$a_1\xi + b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{(S)} \{(a_1\xi(p') - b_1)K_{\xi\xi}(P, p') + (a_1\eta(p') + c_1)K_{\xi\eta}(P, p')\}\, ds$$

und

$$a_1\eta + c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{(S)} \{(a_1\xi(p') + b_1)K_{\eta\xi}(P, p') - (a_1\eta(p') - c_1)K_{\eta\eta}(P, p')\}\, ds.$$

Läßt man daher den in R gelegenen Punkt (ξ, η) gegen einen Punkt p von S konvergieren, so erhält man

$$a_1\xi(p) + b_1 = \frac{1}{2}(a_1\xi(p) + b_1) + \frac{1}{\pi}\int_{(S)} \{(a_1\xi(p') + b_1)K_{\xi\xi}(p, p') + \\ + (a_1\eta(p') + c_1)K_{\xi\eta}(p, p')\}\, ds,$$

$$a_1\eta(p) + c_1 = \frac{1}{2}(a_1\eta(p) + c_1) + \frac{1}{\pi}\int_{(S)} \{(a_1\xi(p') + b_1)K_{\eta\xi}(p, p') + \\ + (a_1\eta(p') + c_1)K_{\eta\eta}(p, p')\}\, ds,$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

9. Weiter gilt der Hilfssatz: *Das Integralgleichungssystem* (159) *besitzt einen komplexen Eigenwert.*

Beweis. Sei $\varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2$ mit $\varkappa_2 \neq 0$ ein solcher Eigenwert; die zugehörigen nicht identisch verschwindenden Eigenfunktionen seien

$$f_1(p) = f_{11}(p) + if_{12}(p),$$
$$g_1(p) = g_{11}(p) + ig_{12}(p).$$

Bildet man damit gemäß (152) die Lösungsfunktionen

$$u_1(P) = u_{11}(P) + iu_{12}(P),$$
$$v_1(P) = v_{11}(P) + iv_{12}(P)$$

von (139), so folgt aus

$$u_1^i(p) = f_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g_1(p')\}\,ds,$$
$$u_1^a(p) = -f_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g_1(p')\}\,ds,$$
$$v_1^i(p) = g_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p')g_1(p')\}\,ds, \tag{163}$$
$$v_1^a(p) = -g_1(p) + \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p')g_1(p')\}\,ds,$$

indem man die erste bzw. dritte Gleichung mit $\frac{1+\varkappa}{2}$ multipliziert und sie jeweils zu der mit $-\frac{1-\varkappa}{2}$ multiplizierten zweiten bzw. vierten Gleichung hinzuaddiert.

$$\frac{1+\varkappa}{2}u_1^i - \frac{1+\varkappa}{2}u_1^a = f_1 + \varkappa\frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}f_1 + K_{\xi\eta}g_1\}\,ds = 0,$$
$$\frac{1+\varkappa}{2}v_1^i - \frac{1+\varkappa}{2}v_1^a = g_1 + \varkappa\frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}f_1 + K_{\eta\eta}g_1\}\,ds = 0$$

oder, indem man zu Real- und Imaginärteil übergeht,

$$(1+\varkappa_1)u_{11}^i - (1-\varkappa_1)u_{11}^a - \varkappa_2 u_{12}^i - \varkappa_2 u_{12}^a = 0,$$
$$(1+\varkappa_1)u_{12}^i - (1-\varkappa_1)u_{12}^a + \varkappa_2 u_{11}^i + \varkappa_2 u_{11}^a = 0,$$
$$(1+\varkappa_1)v_{11}^i - (1-\varkappa_1)v_{11}^a - \varkappa_2 v_{12}^i - \varkappa_2 v_{12}^a = 0,$$
$$(1+\varkappa_1)v_{12}^i - (1-\varkappa_1)v_{12}^a + \varkappa_2 v_{11}^i + \varkappa_2 v_{11}^a = 0.$$

Beachtet man nun, daß die mit den Funktionen $u_{11}(P)$, $v_{11}(P)$ bzw. $u_{12}(P)$, $v_{12}(P)$ gebildeten Ausdrücke $X_{u_{11}, v_{11}}(P, p)$, $Y_{u_{11}, v_{11}}(P, p)$ bzw. $X_{u_{12}, v_{12}}(P, p)$, $Y_{u_{12}, v_{12}}(P, p)$ sich nach den Bemerkungen am Anfang des Abschnitts 5, falls der Punkt P den Kurvenpunkt p passiert, stetig verhalten, so folgt, in-

dem man die erste der zuletzt erhaltenen Gleichungen mit $X_{u_{12}, v_{12}}(p, p)$ multi pliziert, sie zu der mit $Y_{u_{12}, v_{12}}(p, p)$ multiplizierten dritten Gleichung addier und davon die mit $X_{u_{11}, v_{11}}(p, p)$ multiplizierte zweite Gleichung und di mit $Y_{u_{11}, v_{11}}(p, p)$ multiplizierte vierte Gleichung subtrahiert, und inden man alsdann über S integriert wegen (151)

$$
\begin{aligned}
&-\varkappa_2\Big[\int_{(S)}\{u^i_{12}(p')X_{u_{12}, v_{12}}(p', p') + v^i_{12}(p')Y_{u_{12}, v_{12}}(p', p')\}\,ds + \\
&\quad+\int_{(S)}\{u^i_{11}(p')\,X_{u_{11}, v_{11}}(p', p') + v^i_{11}(p')Y_{u_{11}, v_{11}}(p', p')\}\,ds\Big] - \\
&-\varkappa_2\Big[\int_{(S)}\{u^a_{12}(p')\,X_{u_{12}, v_{12}}(p', p') + v^a_{12}(p')Y_{u_{12}, v_{12}}(p', p')\}\,ds + \\
&\quad+\int_{(S)}\{u^a_{11}(p')X_{u_{11}, v_{11}}(p', p') + v^a_{11}(p')Y_{u_{11}, v_{11}}(p', p')\,ds\Big] = 0.
\end{aligned}
$$

Ebenso findet man

$$
\begin{aligned}
&(1+\varkappa_1)\Big[\int_{(S)}\{u^i_{11}(p')X_{u_{11}, v_{11}}(p', p') + v^i_{11}(p')Y_{u_{11}, v_{11}}(p', p')\}\,ds + \\
&\quad+\int_{(S)}\{u^i_{12}(p')X_{u_{12}, v_{12}}(p', p') + v^i_{12}(p')Y_{u_{12}, v_{12}}(p', p')\}\,ds\Big] - \\
&-(1-\varkappa_1)\Big[\int_{(S)}\{u^a_{11}(p')X_{u_{11}, v^{11}}(p', p') + v^a_{11}(p')Y_{u_{11}, v_{11}}(p', p')\}\,ds + \\
&\quad+\int_{(S)}\{u^a_{12}(p')X_{u_{12}, v_{12}}(p', p') + v^a_{12}(p')Y_{u_{12}, v_{12}}(p', p')\}\,ds\Big] = 0.
\end{aligned}
$$

Da die Determinante

$$
\begin{vmatrix} -\varkappa_2, & -\varkappa_2 \\ 1+\varkappa_1, & -(1-\varkappa_1) \end{vmatrix} = 2\varkappa_2 \neq 0
$$

ist, so müssen die Ausdrücke in den eckigen Klammern verschwinden, d. h. es muß wegen (145)

$$
\begin{aligned}
&\iint_{(R)}\Big\{\Big(\frac{\partial u_{11}}{\partial \eta}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_{11}}{\partial \xi}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{11}}{\partial \eta}\Big)^2\Big\}\,d\xi\,d\eta + \\
&+\iint_{(R)}\Big\{\Big(\frac{\partial u_{12}}{\partial \eta}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_{12}}{\partial \xi}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_{12}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{12}}{\partial \eta}\Big)^2\Big\}\,d\xi\,d\eta = 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\iint_{(R_a)}\Big\{\Big(\frac{\partial u_{11}}{\partial \eta}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_{11}}{\partial \xi}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{11}}{\partial \eta}\Big)^2\Big\}\,d\xi\,d\eta + \\
&+\iint_{(R_a)}\Big\{\Big(\frac{\partial u_{12}}{\partial \eta}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v_{12}}{\partial \xi}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_{12}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_{12}}{\partial \eta}\Big)^2\Big\}\,d\xi\,d\eta = 0
\end{aligned}
$$

sein.

Daraus entnimmt man aber, daß mit geeigneten Konstanten

$$a_{11},\ b_{11},\ c_{11};\quad a'_{11},\ b'_{11},\ c'_{11};\quad a_{12},\ b_{12},\ c_{12};\quad a'_{12},\ b'_{12},\ c'_{12}$$

die Gleichungen

$$u_{11}(P) = a_{11}\xi + b_{11},\quad v_{11}(P) = a_{11}\eta + c_{11} \text{ in } R,$$
$$u_{11}(P) = a'_{11}\xi + b'_{11},\quad v_{11}(P) = a'_{11}\eta + c'_{11} \text{ in } R_a$$

bzw.

$$u_{12}(P) = a_{12}\xi + b_{12},\quad v_{12}(P) = a_{12}\eta + c_{12} \text{ in } R,$$
$$u_{12}(P) = a'_{12}\xi + b'_{12},\quad v_{12}(P) = a'_{12}\eta + c'_{12} \text{ in } R_a$$

bestehen müssen. Da die Funktionen $u_{ar}(P)$ und $v_{ar}(P)$ aber im Unendlichen verschwinden, so ergibt sich

$$a'_{11} = b'_{11} = c'_{11} = a'_{12} = b'_{12} = c'_{12} = 0,$$

d. h.

$$u_1(P) \equiv 0,\quad v_1(P) \equiv 0 \text{ in } R_a.$$

Subtrahiert man alsdann in (163) die zweite Gleichung von der ersten und die vierte von der dritten, so findet man

$$2 f_1(p) = (a_{11} + i a_{12})\,\xi(p) + (b_{11} + i b_{12}),$$
$$2 g_1(p) = (a_{11} + i a_{12})\,\eta(p) + (c_{11} + i c_{12}).$$

Nach dem im vorhergehenden Abschnitt bewiesenen Hilfssatz ist dann aber

$$f_1(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p') f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p') g_1(p')\}\, ds = 0,$$
$$g_1(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p') f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p')\, g_1(p')\}\, ds = 0.$$

Wegen (159) mit $\varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2$ $(\varkappa_2 \neq 0)$ ergibt sich somit

$$f_1(p)\,(1 + \varkappa) = 0,\quad g_1(p)\,(1 + \varkappa) = 0.$$

Da aber $f_1(p)$ und $g_1(p)$ nicht zugleich identisch verschwinden, so muß im Widerspruch zur Annahme

$$\varkappa_2 = 0$$

sein.

10. Wir können nunmehr den folgenden Hilfssatz beweisen: *Ist m eine ungerade Zahl, so besitzt das aus* (143) *durch m-fache Iteration hervorgehende homogene Integralgleichungssystem genau eine linear unabhängige Lösung, für die man eine beliebige nicht identisch verschwindende Lösung von* (143) *wählen kann.*

Beweis. Nach dem Vorgang von § 4, Abschnitt 4 schreibe man das System (143) zunächst als eine einzige Integralgleichung

$$f_1^*(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(\mathfrak{S})} K(p, p') f_1^*(p')\, ds = 0. \tag{164}$$

Die daraus durch m-fache Iteration hervorgehende Gleichung

$$f^{(m)}(p) + (-1)^{m-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{(m)} \int_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds = 0 \tag{165}$$

habe die nichtidentisch verschwindende Lösung $f^{(m)}$. Sind dann $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ die m-ten Einheitswurzeln, bei denen $\varepsilon_1 = 1$ die einzige reelle Wurzel sei, so setze man

$$\begin{aligned} m\,\varphi_\mu(p) &= f^{(m)}(p) - \varepsilon_\mu \frac{2}{\pi} \int_{(\mathfrak{S})} K(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds + \varepsilon_\mu^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{(\mathfrak{S})} K^{(2)}(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds + \\ &\quad \cdots + (-1)^{m-1} \varepsilon_\mu^{m-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{m-1} \int_{(\mathfrak{S})} K^{(m-1)}(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds. \end{aligned} \tag{166}$$

Die m-Funktionen $\varphi_\mu(p)$ können nicht sämtlich identisch verschwinden, da man sonst durch Addition bei Beachtung von

$$\sum_{\mu=1}^{m} \varepsilon_\mu^\varrho = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{167}$$

auf

$$f^{(m)}(p) \equiv 0$$

schließen könnte.

Verschwinde also für ein gewisses μ die Funktion $\varphi_\mu(p)$ nicht identisch. Es folgt

$$\begin{aligned} m \frac{2}{\pi} \int_{(\mathfrak{S})} & K(p, p')\, \varphi_\mu(p')\, ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{(\mathfrak{S})} K(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds - \varepsilon_\mu \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{(\mathfrak{S})} K^{(2)}(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds + \\ &\quad \cdots + (-1)^{m-1} \varepsilon_\mu^{m-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^m \int_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds \\ &= -\frac{m\,\varphi_\mu(p) + f^{(m)}(p)}{\varepsilon_\mu} + (-1)^{m-1} \varepsilon_\mu^{m-1} \left(\frac{2}{\pi}\right)^m \int_{(\mathfrak{S})} K^{(m)}(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds \end{aligned}$$

und also bei Beachtung von (165)

$$\varphi_\mu(p) + \varepsilon_\mu \frac{2}{\pi} \int_{(\mathfrak{S})} K(p, p')\, \varphi_\mu(p')\, ds = 0. \tag{168}$$

Auf Grund des im Abschnitt 9 bewiesenen Hilfssatzes muß dann ε_μ reell, d. h. $\varepsilon_\mu = \varepsilon_1 = 1$ sein. Der einzige nichtverschwindende Ausdruck der Form (166) ist also der für $\mu = 1$, der wegen (168) gleich einem Vielfachen einer nicht-identisch verschwindenden Lösung $f_1^*(p)$ von (164) sein muß:

$$m\varphi_1(p) - f^{(m)}(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(\mathfrak{S})} K(p, p')\, f^{(m)}(p')\, ds + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{(\mathfrak{S})} K^{(2)}(p, p') f^{(m)}(p')\, ds + \cdots + (-1)^{m-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m-1} \int_{(\mathfrak{S})} K^{(m-1)}(p, p') f^{(m)}(p')\, ds = k_1 f_1^*(p).$$

Durch Addition der Gleichungen (166) erhält man also bei Beachtung von (167)

$$m f^{(m)}(p) = k_1 f_1^*(p),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

11. Man wähle nun die ungerade Zahl m so groß, daß der iterierte Kern $K^{(m)}(p, q)$ auf seinem Definitionsbereich durchweg stetig ist. Nach dem eben bewiesenen Hilfssatz verschwindet die für den Kern

$$(-1)^m \left(\frac{2}{\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q) \tag{169}$$

gebildete Fredholmsche Unterdeterminante

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

nicht identisch in den auf $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkten p und q; es wird also ein solches Punktepaar p_1, q_1 geben, daß

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{170}$$

ist.

Bildet man ebenfalls für den Kern (169) die Fredholmsche Unterdeterminante

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p\, p_1 \\ q\, q_1 \end{pmatrix},$$

und setzt man

$$\Omega(p, q) = -\frac{2}{\pi} K(p, q) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K^{(2)}(p, q) - + \cdots + (-1)^m \left(\frac{2}{\pi}\right)^m K(p, q),$$

$$\Gamma^{(m)}(p, q) = \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p, p_1 \\ q, q_1 \end{pmatrix}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}}, \tag{171}$$

$$\Gamma(p, q) = \Omega(p, q) + \int_{(\mathfrak{S})} \Omega(p, p')\, \Gamma^{(m)}(p', q)\, ds,$$

so beweist man mit der im Abschnitt 3 von § 5 benutzten Methode, daß die Funktion

$$f^*(p) = \varrho^*(p) + \int_{(S)} \Gamma(p, p')\, \varrho^*(p')\, ds \tag{172}$$

stets eine Lösung der dem inhomogenen System (142) äquivalenten Integralgleichung

$$f^*(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S)} K(p, p') f^*(p')\, ds = \varrho^*(p) \tag{173}$$

ist.

12. Wir sind nunmehr in der Lage, den im 8. Abschnitt bereits formulierten Satz 12 zu beweisen. Sind die S_n wieder die in R gelegenen, gegen S mit wachsendem n konvergierenden Approximationskurven, und stellt das Funktionenpaar $u(P)$, $v(P)$ eine beliebige Lösung des Problems (139), (140) dar, so verstehe man unter

$$u_{(n)}(P), \quad v_{(n)}(P)$$

die zu dem Gebiet R_n gehörigen Lösungsfunktionen der Gleichungen (139) von der Form (158), die bei Annäherung an die Berandung S_n von R_n gegen die dort von den Funktionen $u(P)$, $v(P)$ angenommenen Werte konvergieren, also

$$\begin{aligned} u_{(n)}(P) &= \frac{2}{\pi} \int_{(S_n)} \{K_{\xi\xi, n}(P, p') f_{(n)}(p') + K_{\xi\eta, n}(P, p') g_{(n)}(p')\}\, ds, \\ v_{(n)}(P) &= \frac{2}{\pi} \int_{(S_n)} \{K_{\eta\xi, n}(P, p') f_{(n)}(p') + K_{\eta\eta, n}(P, p') g_{(n)}(p')\}\, ds, \end{aligned} \tag{174}$$

wobei wir für die Funktionen $f_{(n)}(p)$, $g_{(n)}(p)$ die zu (172) analog gebauten, auf die Kurven $S_{(n)}$ bezüglichen Lösungen des Integralgleichungssystems

$$\begin{aligned} f_{(n)}(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S_n)} \{K_{\xi\xi, n}(p, p') f_{(n)}(p') + K_{\xi\eta, n}(p, p') g_{(n)}(p')\}\, ds &= [u]_{S_n}, \\ g_{(n)}(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S_n)} \{K_{\eta\xi, n}(p, p') f_{(n)}(p') + K_{\eta\eta, n}(p, p') g_{(n)}(p')\}\, ds &= [v]_{S_n} \end{aligned} \tag{175}$$

wählen.

Wir behaupten, daß innerhalb R_n

$$u_{(n)}(P) \equiv u(P), \quad v_{(n)}(P) \equiv v(P) \tag{176}$$

sein muß. Da nämlich $u_{(n)}(P)$ und $v_{(n)}(P)$ in $R_n + S_n$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, so gilt dasselbe von den Differenzfunktionen

$$\bar{u}_{(n)}(P) = u_{(n)}(P) - u(P), \quad \bar{v}_{(n)}(P) = v_{(n)}(P) - v(P).$$

Wählt man zu der Potentialfunktion

$$\bar{\vartheta}_{(n)}(P) = \frac{\partial \bar{u}_{(n)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}_{(n)}}{\partial \eta} = \frac{\partial u_{(n)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_{(n)}}{\partial \eta} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S_n)} f_{(n)}(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S_n)} g_{(n)}(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds - \vartheta$$

als konjugierte Potentialfunktion die Funktion

$$\bar{\chi}_{(n)}(P) = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_{(S_n)} f_{(n)}(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int\limits_{(S_n)} g_{(n)}(p')\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}ds -$$

$$-\int\limits_{(C)}\left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}d\xi\right\},$$

wobei C eine in R_n gelegene Kurve bedeutet, die von einem beliebigen festen Punkt P_0 zu dem variablen Punkt P verläuft, so ist $\bar{\chi}_{(n)}(P)$ in $R_n + S_n$ stetig. Da aber die Randwerte der Funktionen $\bar{u}_{(n)}(P)$, $\bar{v}_{(n)}(P)$, die sich ergeben, wenn sich der in R_n gelegene Punkt P der Berandung S_n nähert, verschwinden, so folgt aus dem für den Bereich $R_n + S_n$ benutzten Integralsatz (145), daß in R_n, wie behauptet

$$\bar{u}_{(n)}(P) = u_{(n)}(P) - u(P) \equiv 0, \quad \bar{v}_{(n)}(P) = v_{(n)}(P) - v(P) \equiv 0$$

sein muß.

Sind nun die in (171) auftretenden, auf $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkte p_1 und q_1 so gewählt, daß (170) gilt, und sind p_{1n}, q_{1n} zwei auf den $\mathfrak{S}_{(n)}$ gelegene Punktfolgen mit

$$p_{1n} \underset{(n)}{\longrightarrow} p_1, \quad q_{1n} \underset{(n)}{\longrightarrow} q_1,$$

so muß von einem gewissen n ab auch

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p_{1n} \\ q_{1n}\end{pmatrix} \neq 0$$

sein, und man erkennt, daß bei unbegrenzt wachsendem n die Funktionen $f_{(n)}(p)$, $g_{(n)}(p)$ gegen die durch (172) gegebenen Lösungen von (142) und damit die Funktionen (174) gegen die wohlbestimmten Lösungsfunktionen (158) des Problems (139), (140) konvergieren. Wegen (176) ist also eine beliebige Lösung $u(P)$, $v(P)$ mit der durch (158) gegebenen Lösung identisch und damit eindeutig bestimmt.

§ 7.

Das äußere Problem in der Ebene.

1. In diesem letzten Paragraphen beweisen wir den folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatz:

Hauptsatz IV. *Genügt die Randkurve des einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen gelegenen Gebietes R den in § 1 genannten Voraussetzungen, und sind die auf S definierten Funktionen ϱ und σ dort stetig und genügen sie der Relation*

$$\int_{(S)} \{\varrho(p') \cos(n_{p'}, \eta) - \sigma(p') \cos(n_{p'}, \xi)\}\, ds = 0, \tag{177}$$

dann gibt es (bis auf eine additive Konstante) genau eine im Außengebiet R_a von R eindeutige biharmonische Funktion U, deren partielle Ableitungen erster Ordnung in $R_a + S$ stetig sind, auf S bzw. mit ϱ und σ übereinstimmen und im Unendlichen sich beschränkt verhalten, während die partiellen Ableitungen zweiter Ordnungen im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden[54]).

Existiert im Gebiet R_a eine biharmonische Funktion mit den verlangten Eigenschaften, so gilt wieder mit

$$u = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} = \Delta U \tag{178}$$

offensichtlich

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \Delta \vartheta = 0 \tag{179}$$

und

$$[u]_S = \varrho, \quad [v]_S = \sigma. \tag{180}$$

Hinsichtlich des Problems (179), (180) besteht aber der in den nächsten Abschnitten zu beweisende

Satz 13. *Sind die Funktionen ϱ und σ auf S stetig, so gibt es eine Lösung u, v des Problems* (179), (180), *die im Unendlichen sich beschränkt verhält, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden.*

Beim Vergleich dieses Satzes mit dem entsprechenden Satz 11 für das innere Problem im ebenen Fall fällt auf, daß hier die Voraussetzung (177)

---

[54]) Es würde genügen vorauszusetzen, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung von U sich im Unendlichen beschränkt verhalten und daß für $r_{OP} \to \infty$

$$\lim (r_{OP} D^2 U) = 0$$

ist — eine Bemerkung, die sich sinngemäß auch auf die folgenden Sätze 13 und 14 übertragen läßt.

nicht benötigt wird. Will man aber umgekehrt von einer Lösung u, v von (179), (180) ausgehend eine in R_a eindeutige biharmonische Funktion U finden, für die (178) gilt, indem man

$$U(P) = \int_{(C)} \{u\,d\xi + v\,d\eta\}$$

setzt, wobei C eine ganz in R_a verlaufende Kurve darstellt, die einen beliebig gewählten, aber festen Punkt P_0 mit einem variablen Punkt P verbindet, so müssen die gegebenen Randfunktionen offenbar notwendig der Gleichung (177) genügen. Verzichtet man jedoch auf die Eindeutigkeit von U, so kann die Voraussetzung (177), die für das innere Problem immer gefordert werden mußte, entbehrt werden.

2. Mit den durch (141) gegebenen Kernen betrachte man das inhomogene Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} f(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g(p')\}ds &= \varrho(p), \\ g(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f(p') + K_{\eta\eta}(p, p')g(p')\}ds &= \sigma(p). \end{aligned} \tag{181}$$

Das zugehörige homogene System

$$\begin{aligned} f_1(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(p, p')g_1(p')\}ds &= 0, \\ g_1(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(p, p')g_1(p')\}ds &= 0 \end{aligned} \tag{182}$$

besitzt nach dem Hilfssatz im Abschnitt 8 von § 6 die drei linear unabhängigen Lösungen

$$\begin{aligned} f_{11}(p) &= \xi(p), & g_{11}(p) &= \eta(p), \\ f_{12}(p) &= k, & g_{12}(p) &= 0, \\ f_{13}(p) &= 0, & g_{13}(p) &= l. \end{aligned} \tag{183}$$

Als Hilfssatz wollen wir nunmehr beweisen: *Jede beliebige Lösung* $f_1(p), g_1(p)$ *von* (182) *ist von den durch* (183) *gegebenen Lösungen linear abhängig.*

Beweis. Mit Hilfe von $f_1(p)$ und $g_1(p)$ bilde man die durch

$$\begin{aligned} u_1(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p')f_1(p') + K_{\xi\eta}(P, p')g_1(p')\}ds, \\ v_1(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p')f_1(p') + K_{\eta\eta}(P, p')g_1(p')\}ds \end{aligned} \tag{184}$$

gegebenen Funktionen, die sowohl im Gebiet R als auch im Gebiet R_a Lösungen der Differentialgleichungen (179) darstellen. Für sie bestehen bei Beachtung von (55), (56), (57), (58) und (182) die Limesrelationen

$$\begin{aligned}
&\lim_{P_n^a \to p} u_1(P_n^a) = f_1(p) - \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p') f_1(p') + \\
&\qquad + K_{\xi\eta}(p, p') g_1(p')\}\, ds = 0, \\
&\lim_{P_n^a \to p} v_1(P_n^a) = g_1(p) - \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p') f_1(p') + \\
&\qquad + K_{\eta\eta}(p, p') g_1(p')\}\, ds = 0, \\
&\lim_{P_n^i \to p} u_1(P_n^i) = f_1(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p, p') f_1(p') + \\
&\qquad + K_{\xi\eta}(p, p') g_1(p')\}\, ds = 2 f_1(p), \\
&\lim_{P_n^i \to p} v_1(P_n^i) = g_1(p) + \frac{2}{\pi} \int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p, p') f_1(p') + \\
&\qquad + K_{\eta\eta}(p, p') g_1(p')\}\, ds = 2 g_1(p).
\end{aligned} \tag{185}$$

Da die partiellen Ableitungen erster Ordnung von u_1, v_1 in $R + S$ als auch in $R_a + S$ stetig sind und zusammen mit der zu

$$\vartheta_1 = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{(S)} f_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds + \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{(S)} g_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds$$

konjugierten Potentialfunktion

$$\chi_1 = -\frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{(S)} f_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds + \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{(S)} g_1(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}} ds$$

im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwinden, und u_1 und v_1 dort ebenfalls verschwinden, so folgt aus der auf das Gebiet R_a bezüglichen Relation (145) bei Beachtung der ersten beiden Gleichungen (185), daß im Gebiet R_a

$$u_1(P) \equiv 0 \quad \text{und} \quad v_1(P) \equiv 0$$

sein muß. Da somit auch $\vartheta_1(P)$ in R_a identisch verschwindet, so gilt das auch für die konjugierte Potentialfunktion $\chi_1(P)$, die ja im Unendlichen von vornherein verschwindet.

Damit bekommt man für die durch (147) gegebenen Ausdrücke, die sich nach den Bemerkungen im Abschnitt 5 von § 6 beim Durchgang durch die Fläche stetig verhalten, zunächst

$$\lim_{P_n^a \to p} X_{u_1, v_1}(P_n^a, p) = 0,$$

$$\lim_{P_n^a \to p} Y_{u_1, v_1}(P_n^a, p) = 0$$

und also auch

$$\lim_{P_n^i \to p} X_{u_1, v_1}(P_n^i, p) = 0,$$

$$\lim_{P_n^i \to p} Y_{u_1, v_1}(P_n^i, p) = 0.$$

Aus (145) folgt dann aber unmittelbar, daß im Gebiet R

$$u_1(P) \equiv a_1\xi + b_1, \quad v_1(P) \equiv a_1\eta + c_1$$

sein muß, wo a_1, b_1, c_1 Konstanten sind. Wegen der beiden letzten Gleichungen von (185) hat man also

$$f_1(p) = \tfrac{1}{2}(a_1\xi(p) + b_1), \quad g_1(p) = \tfrac{1}{2}(a_1\eta(p) + c_1),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

3. Das zu dem System (182) assoziierte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_2(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(p', p)f_2(p') + K_{\xi\eta}(p', p)g_2(p')\}\,ds = 0, \\ g_2(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(p', p)f_2(p') + K_{\eta\eta}(p', p)g_2(p')\}\,ds = 0 \end{aligned} \tag{186}$$

besitzt dann ebenfalls genau drei linear unabhängige Lösungen

$$f_{21}(p),\ g_{21}(p); \quad f_{22}(p),\ g_{22}(p); \quad f_{23}(p),\ g_{23}(p),$$

so daß man als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das System (181) eine Lösung besitzt

$$\begin{aligned} \int_{(S)} \{\varrho\,(p')f_{21}(p') + \sigma\,(p')g_{21}(p')\}\,ds = 0, \\ \int_{(S)} \{\varrho\,(p')f_{22}(p') + \sigma\,(p')g_{22}(p')\}\,ds = 0, \\ \int_{(S)} \{\varrho\,(p')f_{23}(p') + \sigma\,(p')g_{23}(p')\}\,ds = 0 \end{aligned} \tag{187}$$

erhält.

Erfüllen die gegebenen Randfunktionen diese Bedingungen, so liefern die mit einer Lösung $f(p)$, $g(p)$ des Systems (181) gebildeten Funktionen

$$(188)\qquad \begin{aligned} u(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p')f(p') + K_{\xi\eta}(P, p')g(p')\}\,ds, \\ v(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p')f(p') + K_{\eta\eta}(P, p')g(p')\}\,ds \end{aligned}$$

offenbar eine Lösung des Problems (179), (180).

4. Der Fall, daß die Bedingungen (187) nicht erfüllt sind, erfordert eine ähnliche Sonderbetrachtung, wie sie beim äußeren Problem im Raume durchgeführt wurde. Liegt der Ursprung 0 des ξ, η-Koordinatensystems im Gebiet R, so genügen die Funktionen

$$(189)\qquad u_0(P) = \frac{\xi}{r_{OP}^2}, \quad v_0(P) = \frac{\eta}{r_{OP}^2}$$

im Gebiet R_a den Differentialgleichungen (179). Wir behaupten, daß diese Funktionen sich nicht in der Form

$$(190)\qquad \begin{aligned} u_0(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P, p')f_0(p') + K_{\xi\eta}(P,p')g_0(p')\}\,ds, \\ v_0(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P, p')f_0(p') + K_{\eta\eta}(P, p')g_0(p')\}\,ds \end{aligned}$$

mit auf S stetigen Funktionen $f_0(p)$ und $g_0(p)$ darstellen lassen. Da nämlich nach (141) ausführlich geschrieben

$$K_{\xi\xi}(P, p) = \frac{\cos^2(r_{pP}, \eta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}}$$

und

$$K_{\xi\eta}(P, p) = -\frac{\cos(r_{pP}, \xi)\cos(r_{pP}, \eta)\cos(r_{pP}, n_p)}{r_{pP}}$$

ist, und gleichmäßig für alle Punkte p auf S, falls der Punkt P auf der positiven ξ-Achse ins Unendliche rückt, die Limesbeziehungen

$$\frac{r_{OP}}{r_{pP}} \to 1, \quad \cos(r_{pP}, \xi) \to 1, \quad \cos(r_{pP}, \eta) \to 0, \quad \cos(r_{pP}, n_p) \to \cos(\xi, n_p)$$

bestehen, so wird für die auf der rechten Seite von (190) gegebene Funktion $u_0(P)$ bei diesem Grenzübergang

$$r_{OP}u_0(P) \to 0,$$

im Gegensatz zu dem Limesverhalten der auf der rechten Seite von (189) gegebenen Funktion $u_0(P)$, für die

$$r_{OP}u_0(P) = \frac{\xi}{r_{OP}} \to 1$$

sein muß.

5. Verschwinden nun für die gegebenen Randfunktionen ϱ, σ die linken Seiten von (187) nicht gleichzeitig, so behaupten wir, daß sich drei Konstanten h, k, l so bestimmen lassen, daß die Bedingungen (187) für die neuen Randfunktionen

$$\bar{\varrho}(p) = \varrho(p) - h\frac{\xi(p)}{r_{Op}^2} - k, \quad \bar{\sigma}(p) = \sigma(p) - h\frac{\eta(p)}{r_{Op}^2} - l \tag{191}$$

erfüllt sind. Dazu müßten die drei Konstanten aus dem linearen inhomogenen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
h\int_{(S)}\left\{\frac{\xi(p')}{r_{Op'}^2}f_{21}(p') + \frac{\eta(p')}{r_{Op'}^2}g_{21}(p')\right\}ds + k\int_{(S)}f_{21}(p')ds + l\int_{(S)}g_{21}(p')ds \\
= \int_{(S)}\{\varrho(p')f_{21}(p') + \sigma(p')g_{21}(p')\}ds, \\
h\int_{(S)}\left\{\frac{\xi(p')}{r_{Op'}^2}f_{22}(p') + \frac{\eta(p')}{r_{Op'}^2}g_{22}(p')\right\}ds + k\int_{(S)}f_{22}(p')ds + l\int_{(S)}g_{22}(p')ds \\
= \int_{(S)}\{\varrho(p')f_{22}(p') + \sigma(p')g_{22}(p')\}ds, \\
h\int_{(S)}\left\{\frac{\xi(p')}{r_{Op'}^2}f_{23}(p') + \frac{\eta(p')}{r_{Op'}^2}g_{23}(p')\right\}ds + k\int_{(S)}f_{23}(p')ds + l\int_{(S)}g_{23}(p')ds \\
= \int_{(S)}\{\varrho(p')f_{23}(p') + \sigma(p')g_{23}(p')\}ds
\end{aligned} \tag{192}$$

ermittelt werden. Die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems ist, wie alsbald gezeigt werden wird, ungleich Null, so daß eine solche Bestimmung stets eindeutig möglich ist.

Es existieren also zwei Funktionen $f(p)$ und $\bar{g}(p)$ als Lösungen eines inhomogenen Integralgleichungssystems der Form (181), bei dem als inhomogene Bestandteile statt ϱ und σ die durch (191) gegebenen Funktionen gewählt sind. Die mit ihnen gebildeten Funktionen

$$\begin{aligned}
u(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\xi\xi}(P,p')\bar{f}(p') + K_{\xi\eta}(P,p')g(p')\}ds + h\frac{\xi}{r_{OP}^2} + k, \\
v(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)}\{K_{\eta\xi}(P,p')\bar{f}(p') + K_{\eta\eta}(P,p')\bar{g}(p')\}ds + h\frac{\eta}{r_{OP}^2} + l
\end{aligned} \tag{193}$$

lösen alsdann offenbar das Problem (178), (179), womit Satz 13 ganz allgemein bewiesen ist.

Die für den Fall der Gültigkeit von (187) durch (190) gegebene Lösung ist offenbar in (193) mitenthalten, da in diesem Fall die sich aus (192) ergebenden Konstanten h, k, l sämtlich verschwinden müssen.

6. Nehmen wir, um den Beweis zu vervollständigen, an, daß die erwähnte Koeffizientendeterminante gleich Null ist. Das zu (192) gehörige, für $\varrho = \sigma = 0$ sich ergebende homogene lineare Gleichungssystem besitzt dann eine nicht triviale Lösung h, k, l. Also gibt es zwei Funktionen $\bar{\bar{f}}(p)$ und $\bar{\bar{g}}(p)$, die einem inhomogenen Integralgleichungssystem der Form (181) genügen, dessen inhomogene Bestandteile die Funktionen

$$h\frac{\xi(p)}{r_{Op}^2} + k, \quad h\frac{\eta(p)}{r_{Op}^2} + l \tag{194}$$

sind. Die mit $\bar{\bar{f}}$, $\bar{\bar{g}}$ gebildeten Funktionen

$$\begin{aligned} \bar{\bar{u}}(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\xi\xi}(P,p')\,\bar{\bar{f}}(p') + K_{\xi\eta}(P,p')\,\bar{\bar{g}}(p')\}\,ds, \\ \bar{\bar{v}}(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S)} \{K_{\eta\xi}(P,p')\,\bar{\bar{f}}(p') + K_{\eta\eta}(P,p')\,\bar{\bar{g}}(p')\}\,ds \end{aligned} \tag{195}$$

von der Form (188) genügen im Gebiet R_a den Differentialgleichungen (179) und nehmen auf S die Randwerte

$$[\bar{\bar{u}}]_S = h\frac{\xi(p)}{r_{Op}^2} + k, \quad [\bar{\bar{v}}]_S = h\frac{\eta(p)}{r_{Op}^2} + l \tag{196}$$

an. Die Funktionen

$$u^*(P) = \bar{\bar{u}}(P) - \left(h\frac{\xi}{r_{OP}^2} + k\right), \quad v^*(P) = \bar{\bar{v}}(P) - \left(h\frac{\eta}{r_{OP}^2} + l\right) \tag{197}$$

sind dann im Gebiet R_a ebenfalls Lösungen der Gleichungen (179) und konvergieren bei Annäherung an S wegen (196) gegen die Randwerte

$$[u^*]_S = 0, \quad [v^*]_S = 0. \tag{198}$$

Da die Funktionen (194) auf S Tangentialableitungen besitzen, die einer gleichmäßigen H-Bedingung genügen, so gilt dasselbe von den Funktionen $\bar{\bar{f}}(p)$, $g(p)$, und damit existieren von den Funktionen (197) in $R_a + S$ die im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ verschwindenden ersten partiellen Ableitungen.

Wählt man als zu

$$\vartheta^* = \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v^*}{\partial \eta} = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S)} \bar{\bar{f}}(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \\ + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \eta}\int_{(S)} \bar{\bar{g}}(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds$$

konjugierte Potentialfunktion

$$\chi^* = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S)} \bar{f}(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds + \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\int_{(S)} \bar{\bar{g}}(p')\,\frac{\partial\left(\log\frac{1}{r_{p'P}}\right)}{\partial n_{p'}}\,ds,$$

so ist χ^* in $R_a + S$ stetig und verschwindet im Unendlichen ebenfalls wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$. Da somit die mit diesem χ^* gebildeten Funktionen

$$X_{u^*, v^*}(P, p), \quad Y_{u^*, v^*}(P, p)$$

in $R_a + S$ stetig sind und im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^2}$ gegen Null gehen, während die Funktionen u^*, v^* selbst im Unendlichen sich beschränkt verhalten und auf S wegen (198) verschwindende Randwerte annehmen, so folgt aus dem auf $R_a + S$ angewandten Integralsatz (145), daß in R_a

$$u^*(P) \equiv 0, \quad v^*(P) \equiv 0,$$

d. h. wegen (197)

$$h\frac{\xi}{r_{OP}^2} + k \equiv \bar{u}(P), \quad h\frac{\eta}{r_{OP}^2} + l \equiv \bar{\bar{v}}(P)$$

sein muß. Das ist aber nach dem im Abschnitt 4 Bewiesenen nicht möglich, so daß wir bei der zu Beginn dieses Abschnitts gemachten Annahme zu einem Widerspruch gelangt sind.

7. Schreibt man das Integralgleichungssystem für die Funktionen $\bar{f}(p)$, $\bar{g}(p)$ als eine einzige Integralgleichung in der Form

$$\bar{f}^*(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S)} K(p, p')\,\bar{f}^*(p')\,ds = \bar{\varrho}^*(p), \tag{199}$$

so sei die ungerade Zahl m so gewählt, daß der iterierte Kern $K^{(m)}(p, q)$ auf seinem Definitionsbereich stetig ist. Man überlegt dann genau wie in § 6, daß der Kern

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^m K^{(m)}(p, q) \tag{200}$$

genau drei linear unabhängige Eigenfunktionen besitzt, so daß die für ihn gebildete Fredholmsche Determinante

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

nicht identisch in den auf S variierenden Größen p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3 verschwindet. Wir wählen für diese sechs Größen ein spezielles Wertesystem, für das diese Determinante nicht verschwindet.

Bildet man weiter für den Kern (200) die Fredholmsche Unterdeterminante

$$D^{(m)}\begin{pmatrix} p & p_1 & p_2 & p_3 \\ q & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

und setzt man

$$\Omega(p,q) = \left(\frac{2}{\pi}\right) K(p,q) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K(p,q) + \cdots + \left(\frac{2}{\pi}\right)^m K^{(m)}(p,q),$$

$$\Gamma^{(m)}(p,q) = \frac{D^{(m)}\begin{pmatrix} p & p_1 & p_2 & p_3 \\ q & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}}{D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}},$$

$$\Gamma(p,q) = \Omega(p,q) + \int_{(\mathfrak{S})} \Omega(p,p')\Gamma^{(m)}(p',q)\,ds,$$

so wähle man für $\bar{f}^*(p)$ im Hinblick auf eine spätere Anwendung die durch

$$\bar{f}^*(p) = \bar{\varrho}^*(p) + \int_{(\mathfrak{S})} \Gamma(p,p')\,\bar{\varrho}^*(p')\,ds \tag{201}$$

gegebene Lösung der Integralgleichung (199).

Die drei linear unabhängigen Lösungen

$$f_{21}(p),\ g_{21}(p);\quad f_{22}(p),\ g_{22}(p);\quad f_{23}(p),\ g_{23}(p)$$

des assoziierten homogenen Systems (186) denke man sich ferner durch die drei linear unabhängigen Lösungen

$$f^*_{21}(p) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p & q_2 & q_3 \end{pmatrix},\ f^*_{22}(p) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & p & q_3 \end{pmatrix},\ f^*_{23}(p) = D^{(m)}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & p \end{pmatrix} \tag{202}$$

der zu (186) äquivalenten Integralgleichung

$$f^*_2(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(\mathfrak{S})} K(p',p) f^*_2(p')\,ds = 0$$

gegeben.

8. Den Satz 13 ergänzen wir zum Schluß durch folgenden Eindeutigkeitssatz:

Satz 14. *Sind die Funktionen ϱ und σ auf S stetig, so kann es höchstens eine Lösung des Problems* (179), (180) *geben, die sich im Unendlichen beschränkt verhält, während ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung wie $\frac{1}{r^2_{OP}}$ verschwinden.*

Genügen die gegebenen Randfunktionen ϱ und σ der Bedingung (177), so beweisen die Sätze 13 und 14 zusammengenommen den Hauptsatz IV.

Beweis von Satz 14. Sind die S^a_n wieder die in R_a gelegenen gegen S konvergierenden Approximationskurven, und stellt das Funktionenpaar $u(P)$,

$v(P)$ eine beliebige Lösung des Problems (179), (180) dar, so verstehe man unter

$$u_{(n)}(P), \quad v_{(n)}(P)$$

die zu dem Gebiet R_n^a gehörigen Lösungsfunktionen der Gleichungen (179) von der Form (193), die bei Annäherung an die Berandung S_n^a von R_n^a gegen die dort von den Funktionen $u(P)$, $v(P)$ angenommenen Werte konvergieren, also

$$\begin{aligned} u_{(n)}(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S_n^a)} \{K_{\xi\xi,n}(P,p')f_{(n)}(p') + K_{\xi\eta,n}(P,p')g_{(n)}(p')\}\,ds + \\ &\qquad + h_n \frac{\xi}{r_{OP}^2} + k_n, \\ v_{(n)}(P) &= \frac{2}{\pi}\int_{(S_n^a)} \{K_{\eta\xi,n}(P,p')f_{(n)}(p') + K_{\eta\eta,n}(P,p')g_{(n)}(p')\}ds + \\ &\qquad + h_n \frac{\eta}{r_{OP}^2} + l_n, \end{aligned} \tag{203}$$

wobei wir für die Funktionen $f_{(n)}(p)$, $g_{(n)}(p)$ die zu (201) analog gebauten, auf die Kurven S_n^a bezüglichen Lösungen des Integralgleichungssystems

$$\begin{aligned} f_{(n)}(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S_n^a)} \{K_{\xi\xi,n}(p,p')f_{(n)}(p') + K_{\xi\eta,n}(p,p')g_{(n)}(p')\}\,ds \\ = \left[u - h_n \frac{\xi(P)}{r_{OP}^2} - k_n\right]_{S_n^a}, \\ g_{(n)}(p) - \frac{2}{\pi}\int_{(S_n^a)} \{K_{\eta\xi,n}(p,p')f_{(n)}(p') + K_{\eta\eta,n}(p,p')g_{(n)}(p')\}\,ds \\ = \left[v - h_n \frac{\eta(P)}{r_{OP}^2} - l_n\right]_{S_n^a} \end{aligned}$$

wählen.

Wir behaupten, daß innerhalb R_n^a

$$u_{(n)}(P) \equiv u(P), \quad v_{(n)}(P) \equiv v(P) \tag{204}$$

sein muß. Da nämlich $u_{(n)}(P)$ und $v_{(n)}(P)$ in $R_n^a + S_n^a$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen, so gilt dasselbe von den Differenzfunktionen

$$\bar{u}_{(n)}(P) = u_{(n)}(P) - u(P), \quad \bar{v}_{(n)}(P) = v_{(n)}(P) - v(P).$$

Zu der Potentialfunktion

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

deren partielle Ableitungen erster Ordnung im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{OP}^3}$ verschwinden, gehört nun die im Gebiet R_a eindeutige konjugierte Potentialfunktion

$$\chi(P) = \int_{(C)} \left\{\frac{\partial \chi}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial \chi}{\partial \eta}d\eta\right\} = \int_{(C)} \left\{\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}d\xi\right\}, \tag{205}$$

wobei C eine ganz in R_a gelegene Kurve bedeutet, die von einem beliebigen festen Punkt P_0 zu dem variablen Punkt P verläuft. Daß $\chi(P)$ durch (205) in R_a wirklich als eindeutige Funktion erklärt wird, folgt daraus, daß

$$\oint_{(C)} \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi \right\} = 0 \tag{206}$$

ist, wenn über irgendeine in R_a gelegene geschlossene Kurve C integriert wird, auch dann, wenn C das Gebiet R in seinem Innern enthält. Denn versteht man im letzteren Falle unter K_0 einen Kreis um den in R gelegenen Ursprung 0 des Koordinatensystems, der C und damit auch R in seinem Innern enthält, so muß nach dem Gaussschen Integralsatz, da in dem zwischen C und K gelegenen Teilgebiet von R_a

$$\Delta \vartheta = 0$$

ist,

$$\oint_{C} \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi \right\} = \oint_{K_0} \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi \right\}$$

sein. Da aber das rechts stehende Integral, wenn der Radius von K_0 unbegrenzt wächst, gegen 0 konvergiert, so ist (206) bewiesen.

Die durch (205) gegebene Funktion $\chi(P)$ verschwindet im Unendlichen offenbar wie $\frac{1}{r_{0P}^2}$. Wählt man nun zu der Potentialfunktion

$$\begin{aligned} \overline{\vartheta}_{(n)}(P) &= \frac{\partial \overline{u_{(n)}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \overline{v_{(n)}}}{\partial \eta} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{(S_n^a)} f_{(n)}(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}} \right)}{\partial n_{p'}} ds + \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{(S_n^a)} g_{(n)}(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}} \right)}{\partial n_{p'}} ds - \vartheta \end{aligned}$$

als in R_a eindeutige konjugierte Potentialfunktion die Funktion

$$\begin{aligned} \overline{\chi}_{(n)}(P) = &- \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{(S_n^a)} f_{(n)}(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}} \right)}{\partial n_{p'}} ds + \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{(S_n^a)} g_{(n)}(p') \frac{\partial \left(\log \frac{1}{r_{p'P}} \right)}{\partial n_{p'}} ds - \\ &- \int_{(C)} \left\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} d\xi \right\}, \end{aligned}$$

so ist $\overline{\chi}_{(n)}(P)$ in $R_n^a + S_n^a$ stetig und verschwindet ebenso wie die ersten partiellen Ableitungen von $\overline{u_{(n)}}$ und $\overline{v_{(n)}}$ im Unendlichen wie $\frac{1}{r_{0P}^2}$. Da aber die Randwerte der Funktionen $\overline{u_{(n)}}(P)$, $\overline{v_{(n)}}(P)$, die sich ergeben, wenn der in R_n^a gelegene Punkt P gegen die Berandung S_n^a konvergiert, verschwinden,

und die Funktionen selbst sich im Unendlichen beschränkt verhalten, so folgt aus dem auf $R_n^a + S_n^a$ angewandten Integralsatz (145), daß, wie behauptet,

$$\overline{u_{(n)}}(P) = u_{(n)}(P) - u(P) \equiv 0, \quad \overline{v_{(n)}}(P) = v_{(n)}(P) - v(P) \equiv 0$$

sein muß.

Sind nun $p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}; q_{1n}, q_{2n}, q_{3n}$ sechs auf den $\mathfrak{S}_{(n)}$ gelegene Punktfolgen, für die die Limesbeziehungen

$$p_{1n} \underset{(n)}{\rightarrow} p_1, \quad p_{2n} \underset{(n)}{\rightarrow} p_2, \quad p_{3n} \underset{(n)}{\rightarrow} p_3,$$
$$q_{1n} \underset{(n)}{\rightarrow} q_1, \quad q_{2n} \underset{(n)}{\rightarrow} q_2, \quad q_{3n} \underset{(n)}{\rightarrow} q_3$$

bestehen, so muß von einem gewissen n ab

$$D_{(n)}^{(m)} \begin{pmatrix} p_{1n} & p_{2n} & p_{3n} \\ q_{1n} & q_{2n} & q_{3n} \end{pmatrix} \neq 0$$

sein, und man erkennt, daß bei unbegrenzt wachsendem n die Funktionen $f_{(n)}(p)$, $g_{(n)}(p)$ gegen die durch (201) gegebenen Funktionen $\overline{f}(p)$, $\overline{g}(p)$ konvergieren, wenn man noch beachtet, daß die Konstanten h_n, k_n, l_n, die mit Hilfe der durch (202) gegebenen Funktionen

$$f_{21,n}(p), \; g_{21,n}(p); \quad f_{22,n}(p), \; g_{22,n}(p); \quad f_{23,n}(p), \; g_{23,n}(p)$$

gewonnen werden, für $n \to \infty$ gegen die aus dem Gleichungssystem (192) zu bestimmenden Konstanten h, k, l konvergieren.

Damit konvergieren aber die Funktionen (203) gegen die durch (193) gegebenen Lösungsfunktionen des Problems (179), (180). Wegen (204) ist also eine beliebige Lösung $u(P)$, $v(P)$ mit der Lösung (193) identisch und damit eindeutig bestimmt.

(Eingegangen am 22. Mai 1942.)

Über die dichteste Kugellagerung.

Von

L. Fejes in Kolozsvár.

1. Wir betrachten einen hinreichend großen Würfel des gewöhnlichen euklidischen Raumes und legen in denselben in einer gewissen Anordnung eine Anzahl gleichgroßer Kugeln, etwa vom Halbmesser 1. Als Maß für die Dichte dieser Kugellagerung erklären wir den Gesamtinhalt der eingelagerten Kugeln geteilt durch den Inhalt des gegebenen Würfels. Weiter betrachten wir nun eine Folge von Würfeln $W_1, W_2, \ldots, W_i, \ldots$, deren Inhalte unbegrenzt zunehmen, und zugleich mit jedem Würfel W_i den Maximalwert $\bar{D}_i$ der Dichten aller möglichen Kugellagerungen. Die Zahlenfolge $\bar{D}_1, \bar{D}_2, \ldots, \bar{D}_i, \ldots$ strebt dann einem Grenzwert zu: $\bar{D}_i \to \bar{D}$. Wir wollen uns in diesem Aufsatz einer Abschätzung dieser Grenzdichte $\bar{D}$ zuwenden.

In dem Werke von Hilbert-Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie, § 7 (Berlin, Springer, 1932) wird das Problem der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung behandelt. Es werden hier also nur derartige Kugelanordnungen zum Vergleich zugelassen, deren Mittelpunkte ein räumliches Gitter bilden. Als Lösung ergibt sich die „rhomboedrische Kugellagerung" mit einer Dichte

$$D_0 = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{6} = 0{,}7405.$$

Über das Problem der dichtesten Kugellagerung bei einer beliebigen Kugelanordnung steht dort S. 46: „... Andersartige Untersuchungen werden nötig, wenn man die Forderung nach regelmäßiger Anordnung der Kreise oder Kugeln fallen läßt und z. B. nur verlangt, daß möglichst viele gleichgroße Kreise (Kugeln) in jedem hinreichend großen Gebiet der Ebene (des Raumes) enthalten sind. Für den Fall der Ebene ist bewiesen worden, daß die Kreise dann von selbst gitterförmig angeordnet sein müssen. Im drei- und mehrdimensionalen Raum ist die Frage noch nicht geklärt."

Die Frage, ob es eine Kugellagerung mit einer Dichte $D > D_0$ gibt, ist daher noch nicht gelöst. Wir wollen jedoch zeigen, daß *die Dichte einer beliebigen*[1]) *Kugellagerung stets kleiner ist als der Inhalt einer Kugel geteilt durch den Inhalt des umbeschriebenen regulären Dodekaeders*:

$$\bar{D} < \frac{4\pi}{3} : 10\sqrt{2\,(65-29\sqrt{5})} = 0{,}7546. \tag{1}$$

Die rechtsstehende Konstante liegt nur weniger als 2% oberhalb D_0.

[1]) In dem Beweis haben wir uns teilweise lediglich auf die Anschauung gestützt. Der Beweis bezieht sich daher ganz strenggenommen nur auf derartige Kugellagerungen,

Wir können unser Ergebnis auch etwas anders aussprechen: Ein räumliches Gebiet mit einem hinreichend großen Inhalt J enthält angenähert höchstens $\frac{3}{4\pi}\overline{D}J = 0{,}1802\,J$ Einheitskugeln. Wir wissen dabei bereits, daß diese Konstante nicht unter $\frac{\sqrt{2}}{8} = 0{,}1768$ gedrückt werden kann.

2. Vor dem Beweis wenden wir uns zunächst dem entsprechenden Problem in der Ebene zu[2]): Es seien demnach in einem Quadrat vom Flächeninhalt T n Kreise mit dem gemeinsamen Halbmesser 1 vorhanden, die sich teilweise berühren können, aber nie überdecken. Bezeichnen wir die Kreismittelpunkte mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$, so gilt für ein beliebiges Punktpaar $\overline{P_i P_k} \geqq 2$ ($i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq k$).

Wir greifen einen beliebigen Punkt, etwa P_i, heraus und errichten auf sämtlichen Strecken $P_iP_1, P_iP_2, \ldots, P_iP_n$ in ihren Mittelpunkten die Lote. Wir betrachten ferner von den Halbebenen, die durch diese Lote bestimmt werden, diejenigen, die P_i enthalten, fassen die Durchschnittsmenge T_i dieser Halbebenen ins Auge und bezeichnen den Flächeninhalt von T_i, falls er endlich ist, ebenfalls mit T_i. Wir behaupten, daß

$$T_i \geqq 2\sqrt{3}$$

ausfällt und daß das Gleichheitszeichen nur in dem Falle gelten kann, wenn T_i ein dem um P_i geschlagenen Einheitskreis k_i umbeschriebenes reguläres Sechseck ist.

Zum Beweis betrachten wir den um P_i mit dem Halbmesser $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ geschlagenen Kreis K_i, d. h. den Umkreis des erwähnten Sechsecks. Wir zeigen, daß unsere Ungleichung schon für den Inhalt des in K_i liegenden Teiles von T_i gilt.

Wir stehen daher folgender Aufgabe gegenüber: Wir betrachten eine Anzahl von Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, die in dem von k_i und K_i begrenzten Kreisring liegen und voneinander einen Abstand $\geqq 1$ besitzen. Wir zeichnen die durch Q_j gelegten, auf P_iQ_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) senkrechten Sekanten von K_i und betrachten den Gesamtinhalt t_i der von diesen Sekanten bestimmten Kreisabschnitte. Dann haben wir zu zeigen, daß t_i sein Maximum im Falle eines regulären Sechsecks erreicht.

---

bei denen eine, mit einer beliebigen Einheitskugel konzentrische Kugel eines Halbmessers von etwa 2,5 von den übrigen Kugelmittelpunkten höchstens zwölf enthält. Wir erhalten sicherlich eine derartige Kugellagerung, falls jede Kugel von zwölf anderen berührt wird.

[2]) Der Grundgedanke des hier folgenden Beweises stimmt mit demjenigen, den ich in meinem Aufsatz: Über einen Geometrischen Satz. Math. Zeitschr. 46 (1940), S. 83 — 85 mitgeteilt habe, überein. Einige Änderungen im Beweis werden uns die Betrachtung des räumlichen Problems erleichtern.

Wir bemerken vor allem, daß in unserem Kreisring höchstens 7 Punkte vom kürzesten Abstand $\geqq 1$ liegen können. Man rechnet aber leicht nach, daß in diesem Fall sämtliche Punkte sehr nahe an K_i liegen müssen; die Sekanten schneiden mithin nur einen überaus kleinen Teil von K_i ab.

Zur Untersuchung verbleibt daher nur noch der Fall $m \leqq 6$. In diesem ist aber unsere Behauptung trivial!

Weiterhin bemerken wir, daß die soeben bewiesene Ungleichung noch richtig bleibt, wenn wir T_i durch den ins Quadrat T fallenden Teil T_i' von T_i ersetzen. Um dies in Evidenz zu setzen, genügt es, sämtliche Kreise an den Quadratseiten zu spiegeln und im Beweis auch diese Spiegelbilder in Betracht zu ziehen.

Addieren wir die Ungleichungen $T_i' \geqq 2\sqrt{3}$, so erhalten wir auf der linken Seite den Quadratinhalt $T \geqq 2\sqrt{3}\, n$,

$$n \leqq \frac{\sqrt{3}}{6} T.$$

Damit haben wir aber die zu beweisende Abschätzung der Anzahl der Einheitskreise, die in einem Quadrat vom Inhalt T eingelagert werden können, mit dem genauen Wert der Konstanten bestimmt. Die bestmögliche Kreislagerung wird verwirklicht, wenn wir die Ebene mit regulären Sechsecken auspflastern und die Kreise in diese legen. Diese Kreislagerung ist gitterförmig: die Kreismittelpunkte gehören dem „gleichseitigen Dreiecksgitter" an.

3. Im Raume läßt sich die angedeutete Abschätzung (1) analog zum Vorigen auf folgende Extremalaufgabe zurückführen: Wir betrachten eine endliche Anzahl von Punkten $P_0, P_1, \ldots, P_n$, deren Abstand voneinander $\geqq 1$ ist, errichten im Punkt P_i die auf $P_0 P_i$ senkrechte Ebene e_i und betrachten von den durch e_i bestimmten beiden Halbräumen denjenigen, der P_0 enthält. Wir fassen den Durchschnitt S dieser Halbräume ($i = 1, 2, \ldots, n$) ins Auge und wollen das Minimum des Inhalts von S bestimmen.

Hinsichtlich der Lösung dieser Aufgabe ergibt sich nun gegenüber der Lösung in der Ebene ein wesentlicher Unterschied. Bei der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung wird jede Kugel von zwölf anderen berührt. Von den Berührungspunkten liegen sechs auf einem Großkreis, je drei auf den verschiedenen Seiten desselben Großkreises (Hilbert, Anschauliche Geometrie, S. 41, Abb. 47c). Der Inhalt von S erreicht jedoch sein Minimum nicht für diese Punktekonfiguration. Bei der extremalen Anordnung liegen von den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ebenfalls zwölf auf der um P_0 geschlagenen Einheitskugel k, aber in den Eckpunkten eines regulären Ikosaeders. In diesem Falle ist also S ein reguläres Dodekaeder.

Ließe sich der Raum durch reguläre Dodekaeder auspflastern, so wäre das Problem der dichtesten Kugellagerung völlig gelöst. Dies trifft aber, wie

bekannt, nicht zu! Wir können uns darüber z. B. schon dadurch überzeugen, daß der Flächenwinkel des Dodekaeders $\omega = 116^0 34'$ kein Teiler von 360^0 ist. In (1) muß daher tatsächlich das $<$-Zeichen stehen.

Zum Beweis der Extremaleigenschaft des Dodekaeders umschreiben wir ihm eine Kugel K. Wir zeigen analog zum Problem in der Ebene, daß schon der Inhalt des in K liegenden Teiles von S sein Minimum im Falle eines regulären Dodekaeders erreicht.

Wir haben verschiedene Fälle zu unterscheiden je nach der Anzahl m der Punkte, die in der von k und K begrenzten Kugelschale enthalten sind. Wir beginnen mit dem anziehendsten Fall $m = 12$.

Wir nehmen zunächst an, daß sämtliche Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ auf k liegen. Um über das Problem, welchem wir gegenüberstehen, größere Klarheit zu gewinnen, schicken wir eine Bemerkung voraus.

In der Ebene gehören sechs Punkte mit dem kürzesten Abstand $\geqq 1$, die auf einem Einheitskreis liegen, den Ecken eines regulären Sechsecks an. Auf einer Einheitskugel können höchstens zwölf Punkte mit dem kürzesten Abstand $\geqq 1$ liegen. Dieselben sind aber durch diese Bedingungen noch keineswegs bestimmt: sie können vielmehr ganz verschiedenartig verteilt sein. Außer den beiden Verteilungen, die in Hilbert, Anschauliche Geometrie, S. 41, Abb. 47a, c veranschaulicht sind, ist uns bereits die ikosaedrische bekannt. Da aber die Kantenlänge des der Einheitskugel einbeschriebenen Ikosaeders

$$a = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} = 1{,}0515, \tag{2}$$

also größer als 1 ist, so haben die Punkte bei dieser Verteilung noch einen kleinen Spielraum. All dies zeigt schon die Mannigfaltigkeit, die uns bei dem räumlichen Problem begegnet.

Betrachten wir nach dieser Bemerkung den Kugelabschnitt v_i, den e_i von K abschneidet! Den Inhalt von v_i bezeichnen wir mit v. Die zu v_i gehörige Kugelkalotte sei t_i; ihr Flächeninhalt $\bar{t}$.

Es seien t_i und t_k zwei Kugelkalotten, die sich teilweise überdecken; bezeichnen wir mit t_{ik} ihren Durchschnitt sowie den Flächeninhalt derselben. Wir bezeichnen ferner mit $v(t_{ik})$ den Inhalt des Durchschnitts von v_i und v_k.

Nun können sich aber auch drei Kugelkalotten t_i, t_k, t_l teilweise überdecken. Ihr Durchschnitt sei t_{ikl}; der Inhalt des Durchschnitts von v_i, v_k, v_l sei $\mathfrak{v}(t_{ikl})$. Letztere hängt nicht nur vom Inhaltsmaß t_{ikl} ab, sondern auch von der Gestalt des Gebietes t_{ikl}. Sie ist eine Funktionale! Dagegen ist $v(t_{ik})$ eine gewöhnliche Funktion des Inhaltsmaßes t_{ik}.

Bezeichnen wir den Halbmesser von K mit R, so wird der Inhalt V des in K liegenden Teiles von S:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} - 12\bar{v} + \sum v(t_{ik}) - \sum \mathfrak{v}(t_{ikl}), \tag{3}$$

wobei die Summation auf sämtliche Zahlenpaare bzw. Zahlentripel ($i \leqq 12$, $h \leqq 12$, $l \leqq 12$; $i \neq k$, $k \neq l$, $l \neq i$) zu erstrecken ist.

Bei der ikosaedrischen Anordnung verschwinden sämtliche t_{ikl}, und die t_{ik} besitzen einen gemeinsamen Wert $\bar{\bar{t}}$. Der Dodekaederinhalt ist daher

$$V_D = \frac{4\pi R^3}{3} - 12\,\bar{v} + 30\,v(\bar{\bar{t}}). \tag{4}$$

Wir müssen zeigen, daß $V \geqq V_D$, d. h.

$$\Sigma\, v(t_{ik}) - \Sigma\, v(t_{ikl}) \geqq 30\, v(\bar{\bar{t}}) \tag{5}$$

ausfällt.

Es sei zunächst festgestellt, daß

$$\Sigma\, t_{ik} - \Sigma\, t_{ikl} \geqq 30\,\bar{\bar{t}} \tag{6}$$

ist. Der von den Kugelkalotten t_i bedeckte Teil der Kugeloberfläche K ist nämlich $12\,\bar{t} - \Sigma\, t_{ik} + \Sigma\, t_{ikl}$. Im ikosaedrischen Fall wird aber K von den Kugelkalotten völlig bedeckt. Es gilt folglich

$$12\,t - \Sigma\, t_{ik} + \Sigma\, t_{ikl} \leqq 12\,\bar{t} - 30\,\bar{\bar{t}},$$

womit (6) bewiesen ist.

Es läßt sich ferner leicht zeigen, daß $v(t)$ für $0 \leqq t \leqq t$ eine monoton zunehmende, von unten konvexe Funktion von t ist[3]): Wir können daher die

---

[3]) Legen wir durch den Kugelmittelpunkt P_0 eine Ebene e, die von der vorgegebenen Kugelkalotte t_i einen Teil s abschneidet. Die Zentralprojektion von s auf e_i sei s^*. Die behauptete Konvexität von $v(t)$ ist mit der Behauptung gleichwertig, daß der Flächeninhalt s für $s \leqq \frac{t}{2}$ eine von unten konvexe Funktion des Inhalts s^* ist. Um diese Behauptung einzusehen, bezeichnen wir die Schnittpunkte von e mit dem Begrenzungskreis von t_i mit A und B; der Mittelpunkt von t_i sei P_i'. Im sphärischen Dreieck $\Delta P_i' A B$ sei $\sphericalangle A P_i' B = 2\varphi$, $\sphericalangle P_i' A B = \sphericalangle P_i' B A = \psi$ und schließlich $\sphericalangle P_i' P_0 A = \sphericalangle P_i' P_0 B = c$. Dann gilt $\operatorname{cotg} \psi = \cos c \cdot \operatorname{tg} \varphi$ und demzufolge

$$s = R^2(1 - \cos c)\,\varphi - R^2(2\varphi + 2\psi - \pi) = R^2[\pi - 2 \operatorname{arc\,cotg}(\cos c \cdot \operatorname{tg}\varphi) - 2\varphi\cos c],$$

$$s^* = \tfrac{1}{2} R^2 \sin^2 c\,(2\varphi - \sin 2\varphi).$$

Es ergibt sich daraus

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{2R^2 \cos c \cdot \sin^2 c \cdot \sin^2\varphi}{1 - \sin^2 c \cdot \sin^2\varphi}, \quad \frac{ds^*}{d\varphi} = 2R^2 \sin^2 c \cdot \sin^2\varphi,$$

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{\cos c}{1 - \sin^2 c \cdot \sin^2\varphi}.$$

Letztere ist für $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ eine monoton zunehmende Funktion von φ und folglich auch von s^*, womit alles bewiesen ist.

Jensensche Ungleichung[4]) anwenden. Dazu sei nur noch bemerkt, daß ein beliebiges konvexes Zwölfflach höchstens $3 \cdot 12 - 6 = 30$ Kanten hat. Die Anzahl der t_{ik} beträgt daher ebenfalls höchstens 30. Wir erhalten mithin:

$$(7) \quad \frac{1}{30}\sum v(t_{ik}) \geqq v\left(\frac{\Sigma t_{ik}}{30}\right) \geqq v\left(\bar{t} + \frac{1}{30}\sum t_{ikl}\right) \geqq v(t) + \frac{1}{30}v'(t)\sum t_{ikl}.$$

Alles ist daher auf dem Beweis der Ungleichung

$$(8) \qquad v'(\bar{t})\,\Sigma\, t_{ikl} \geqq \Sigma\, \mathfrak{v}(t_{ikl})$$

zurückgeführt. Dieser Beweis gelingt aber schon durch eine ganz grobe Abschätzung. Es genügt zu zeigen, daß für jedes t_{ikl}

$$(9) \qquad \frac{\mathfrak{v}(t_{ikl})}{t_{ikl}} \leqq \frac{v(\bar{t})}{\bar{t}}$$

gilt. Die rechtsstehende Konstante ist nämlich wegen der Konvexität von $v(t)$ kleiner als $v'(\bar{t})$. In (9) lassen sich aber die auf beiden Seiten vorkommenden Größen leicht abschätzen bzw. berechnen. Betrachten wir zunächst $\frac{\mathfrak{v}(t_{ikl})}{t_{ikl}}$.

Vor allem bemerken wir, daß der Durchschnitt von v_i, v_k, v_l sich in erster Annäherung als ein Tetraeder mit der Grundfläche t_{ikl} auffassen läßt. Ist h die zur Grundfläche t_{ikl} gehörige Höhe dieses Tetraeders, so gilt

$$(10) \qquad \frac{\mathfrak{v}(t_{ikl})}{t_{ikl}} \sim \frac{1}{3}h.$$

Wir müssen daher h abschätzen. Die Höhe h erreicht ihr Maximum, falls $\Delta P_i P_k P_l$ in ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 übergeht. In diesem Fall wird das „Dreieck" t_{ikl} ebenfalls gleichseitig. Wir bestimmen den Halbmesser ϱ seines Inkreises.

Es sei $\Delta P_i P_k P_l$ eine Fläche des k einbeschriebenen Ikosaeders ($\overline{P_i P_k} = \overline{P_k P_l} = \overline{P_l P_i} = a$); der Mittelpunkt dieser Fläche sei Q. Wir projizieren Q vom Kugelmittelpunkt P_0 auf die Kugeloberfläche K; die Projektion sei Q'. Der sphärische Abstand zwischen Q' und P_i ist

$$(11) \qquad \widehat{Q' P_i} = u(a) = R \arcsin\frac{\sqrt{3}\,a}{3},$$

Dies ist genau der sphärische Radius des Begrenzungskreises der betrachteten Kugelkalotten t_i. Mit Rücksicht auf den Wert

$$(12) \qquad R = \sqrt{3\,(5 - 2\sqrt{5})} = 1,2584$$

[4]) Ist $f(x)$ eine in (a, b) von unten konvexe Funktion, so gilt für die in (a, b) liegenden Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$. Jensen: Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. Acta Math. 30 (1906), S. 175–193.

gilt nun

$$\varrho = u(a) - u(1) \sim u'(1)(a-1) = \frac{\sqrt{2}}{2} R(a-1) = 0{,}046. \tag{13}$$

Für den auf t_{ikl} ruhenden Flächenwinkel α des Tetraeders gilt: $\cos\alpha = \frac{1}{R}$. Die Höhe h des Tetraeders beträgt daher

$$h \sim \varrho \operatorname{tg}\alpha = \varrho\sqrt{R^2-1} \sim 0{,}035. \tag{14}$$

Mithin bleibt der Quotient $\frac{v(t_{ikl})}{t_{ikl}}$ unter einer Schranke, dessen Näherungswert $\frac{1}{3}h \sim 0{,}012$ beträgt.

Nun ist noch $\frac{v(t)}{t}$ abzuschätzen. Dieser Quotient läßt sich aber leicht genau berechnen. Es gilt zunächst

$$\bar{v} = \frac{\pi}{3}(R-1)^2(2R+1) = 0{,}2460, \quad \bar{t} = 2\pi R(R-1) = 2{,}0431, \tag{15}$$

$$V_D = 10\sqrt{2(65-29\sqrt{5})} = 5{,}5508.$$

Mit Rücksicht auf diese Zahlenwerte ergibt sich aus (4) $30\,v(t) < 0{,}15$. Es gilt ferner $12\,\bar{t} - 30\,t = 4\pi R^2$, woraus wir $30\,\bar{t} > 4.62$ erhalten. Folglich gilt

$$\frac{v(t)}{t} = 0{,}032 > \frac{v(t_{ikl})}{t_{ikl}},$$

womit alles bewiesen ist[5]).

Jetzt können wir uns von der Annahme, daß die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ auf k liegen, freimachen. Nehmen wir an, daß ein Punkt vom Mittelpunkt P_0 der Kugel K den Abstand r besitzt ($1 < r < R$). Der Inhalt des zugehörigen Kugelabschnitts ist $\frac{\pi}{3}(R-r)^2(2R+r)$. Bei einer extremalen Anordnung ist aber sicherlich

$$\frac{\pi}{3}(R-r)^2(2R+r) + 11\bar{v} > \frac{4\pi R^3}{3} - V_D.$$

Es ergibt sich daraus, daß r nicht etwa die Größe 1.1 überschreiten kann. Damit ist der Fall $m < 12$ ebenfalls mit erledigt!

Wir wollen jetzt eine untere Schranke für den Winkel $\sphericalangle P_iP_0P_k$ bestimmen. Im $\Delta P_0P_iP_k$ sei $\overline{P_0P_i} = 1$, $\overline{P_0P_k} = 1.1$, $\overline{P_iP_k} = 1$. Dann ist $\sphericalangle P_iP_0P_k = \beta = \arccos 0.55 < 56^0\,38'$ und dies ist die gesuchte untere

[5]) Damit wurde z. B. bewiesen, daß unter denjenigen Zwölfflachen, die einer gegebenen Kugel umbeschrieben sind, der Inhalt des regulären Zwölfflachs ein lokales Minimum besitzt. Es ist anzunehmen, daß dieses Minimum ein absolutes ist. Bemerken wir dazu, daß unter den konvexen Polyedern mit der Eckenzahl 20, die einer Kugel einbeschrieben sind, der Inhalt für das reguläre Dodekaeder nicht einmal sich als ein lokales Maximum erweist; s. L. Fejes, Über zwei Maximumaufgaben bei Polyedern. Tôhoku Math. Journ. **46** (1939), S. 79—83.

Schranke. Nimmt nämlich P_0P_i um Δh zu, so muß $\overline{P_0P_k}$ um mehr als Δh abnehmen, damit die Summe der Kugelabschnitte nicht weiter abnimmt. Der Winkel $\measuredangle P_iP_0P_k$ nimmt daher stets zu, bis $\overline{P_0P_i} = \overline{P_0P_k}$ wird.

Ersetzen wir nun die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ durch ihre Zentralprojektionen $P_1', P_2', \ldots, P_{12}'$ auf k, so wird der zu untersuchende Inhalt V verkleinert. Der kürzeste Abstand der Punkte $P_1', P_2', \ldots, P_{12}'$ ist sicherlich größer als $2 \sin \frac{\beta}{2} = 0{,}95$. Die Differenz $a - 0{,}95$ ist aber etwa doppelt so groß als $a - 1$. Folglich ist auch $\frac{v(t_{ikl})}{t_{ikl}}$ angenähert doppelt so groß wie früher, d. h. noch immer wesentlich kleiner als $\frac{v(t)}{t}$.

Die obige Überlegung ist nur als eine erste Orientierung zu betrachten. Wir können uns aber damit begnügen, da wir ja die Feinheit unserer Abschätzung durch eine Reihe grober Vernachlässigungen verdorben haben.

Und nun gelangen wir zu dem in Fußnote [1]) angedeuteten Teil des Beweises, wobei wir uns statt durch strenge Überlegungen von der Anschauung führen lassen. Dieses Verfahren scheint uns darum berechtigt zu sein, da es uns im wesentlichen nur auf eine grobe Abschätzung ankommt, die sich aber exakt nur schwierig verfolgen läßt. Es handelt sich um den Fall $m > 12$.

Wir gehen von der nach der Anschauung naheliegenden Tatsache aus, daß von den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ höchstens zwölf sich auf der um P_0 geschlagenen Einheitskugel k befinden können[6]) oder vielmehr, daß im Falle $P_0P_1 = P_0P_2 = \cdots = P_0P_{12} = 1$ für den 13. Punkt $P_0P_{13} > R \sim 1{,}26$ gilt[7]). Nähern wir P_{13} dem Punkte P_0, so müssen sich mehrere der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ von P_0 entfernen[8]) und der Inhalt V des in K liegenden Teiles von S nimmt bei dieser Operation sicherlich zu, bis für irgendeinen Punkt (etwa für P_i) $P_0P_i = P_0P_{13}$ wird.

Diese Betrachtungen zeigen, daß, wenn wir in die von k und K begrenzte Kugelschale noch weitere Punkte $P_{14}, P_{15}, \ldots$ hineindrängen, der zu untersuchende Inhalt V den neuen Punkten entsprechend stets zunimmt.

4. Wir wollen nun in der ikosaedrischen Anordnung der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$ den gemeinsamen Inhalt der zu denselben Punkten gehörigen Polyeder $S_1, S_2, \ldots, S_{12}$ unte suchen.

[6]) Dies nachzuweisen ist an und für sich schon keine allzuleichte Aufgabe. Es läßt sich dagegen zeigen, daß sich auf einer Kugel mit dem Halbmesser $\frac{1}{a} \sim 0{,}95$ — die also einem Ikosaeder mit der Kantenlänge 1 umbeschrieben ist — genau zwölf Punkte mit dem kürzesten Abstand ≥ 1 befinden können, und zwar in einer einzigen möglichen Anordnung.

[7]) Es gilt auf Grund eines groben Experiments etwa $\overline{P_0P_{13}} > 1{,}38$.

[8]) Vermutlich ist $\sum_{i=1}^{13} P_0P_i > 12 + 1{,}38$ woraus unmittelbar alles folgen würde.

Die um P_1 mit dem Halbmesser R geschlagene Kugel K_1 enthält von $P_2, \ldots, P_{12}$ 5 Punkte, deren Abstand von P_1 gleich a ist. Die zu diesen Punkten gehörigen Kugelabschnitte von K_1 besitzen den Inhalt

$$\frac{\pi}{3}(R-a)^2(2R+a) = 0{,}1601.$$

Mithin gilt für den Inhalt V_1 des in K_1 liegenden Teiles von S_1

$$V_1 > \frac{4\pi R^3}{3} - 5 \cdot 0{,}1601 - 7 \cdot 0{,}2460 = 5{,}8258.$$

Folglich ist der Mittelwert M der Inhalte von $S, S_1, S_2, \ldots, S_{12}$

$$M > \frac{5{,}5492 + 12 \cdot 5{,}8258}{13} = 5{,}8045,$$

eine Zahl, die schon erheblich größer ist als der Inhalt des einer Einheitskugel umbeschriebenen Rombendodekaeders, der den mit S bezeichneten Polyedern in der dichtesten gitterförmigen Kugellagerung entspricht.

Diese Bemerkung bietet uns eine Möglichkeit für eine weitere Verschärfung der im vorigen bewiesenen Abschätzung von $\bar{D}$, ja vielleicht sogar für den Beweis der Vermutung: $\bar{D}$ wäre D_0 gleich. Jedenfalls kann obige Bemerkung als eine Begründung dieser Vermutung angesehen werden.

(Eingegangen am 4. Mai 1942.)

Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière et leur application à l'étude de l'itération des transformations continues.

Par

Ky Fan à Paris.

Introduction.

Dans ses publications récentes, M. Fréchet[1]) a montré qu'il y a un lien étroit, à la fois analytique et dans la forme des énoncés, entre la théorie ergodique et celle des probabilités en chaîne. Il a utilisé dans la théorie ergodique des procédés qu'il avait ingénieusement employés dans la théorie des probabilités en chaîne[2]). Dans cet ordre d'idées, M. Fréchet a introduit les fonctions asymptotiquement presque-périodiques qui sont définies sur une demi-droite positive (c'est-à-dire définies pour les nombres réels $\geqq$ un certain nombre). Il en a fait usage pour obtenir des résultats nouveaux concernant les propriétés moyennes des transformations ponctuelles dépendant du paramètre de temps.

Dans le présent Mémoire, notre but primitif était d'étudier les propriétés moyennes de l'itération des transformations ponctuelles continues dans un espace distancié. De sorte que le paramètre duquel dépend l'itération est un nombre entier positif. Pour employer des méthodes analogues à celles de M. Fréchet, il est donc d'abord nécessaire de traiter les fonctions presque-périodiques et les fonctions asymptotiquement presque-périodiques qui sont définies respectivement pour tous les nombres entiers (positifs, négatifs et nul) ou pour tous les entiers positifs et qui prennent leurs valeurs dans un espace distancié[3]). C'est ce qui constituera la première et la seconde sections

[1]) M. Fréchet, a) Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. C. R. Acad. Sci. **213** (1941), p. 520 - 522; b) Sur le théorème ergodique de Birkhoff. C. R. Acad. Sci. **213** (1941), p. 607—609; c) Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques. Revue Scientifique, 79^{e} année (1941), p. 341—354; d) Une application des fonctions asymptotiquement presque-périodiques à l'étude des familles de transformations ponctuelles et au problème ergodique. Revue Scientifique, 79^{e} année (1941), p. 407—417.

[2]) M. Fréchet, e) Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. Second Livre, Paris, 1938; f) Sur l'allure asymptotique des densités itérées dans le problème des probabilités en chaîne. Bull. Soc. Math. France **62** (1934), p. 68—83.

[3]) Il faut noter que M. J. v. Neumann [Almost periodic functions in a group, I. Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), p. 106] a défini, en généralisant la définition donnée par S. Bochner des fonctions presque-périodiques de H. Bohr, les fonctions presque-périodiques, dont les valeurs sont des nombres complexes et dont l'argument est un élément d'un groupe quelconque. Voir aussi M. W. Maak, Eine neue Definition der fastperiodischen Funktionen. Abhandl. Math. Sem. Hans. Univ. XI (1936), p. 240—244.

de ce travail. Dans la troisième section, nous nous occuperons de l'application de la presque-périodicité et de la presque-périodicité asymptotique à l'étude de l'itération des transformations continues.

En 1939, M. K. Yosida[4]) a déjà appliqué les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière à l'étude de l'itération des transformations. Cependant M. Yosida n'a considéré que les transformations linéaires dans un espace de Banach, tandis que nos résultats principaux contenus dans la troisième section s'appliquent à toute transformation continue dans un espace distancié.

Nous remercions bien vivement M. le Professeur M. Fréchet pour ses précieux conseils.

I. Les fonctions presque-périodiques d'une variable entière[5]).

1. *Définition.* Soit $x = p(n)$ une fonction définie pour tous les nombres entiers n, positifs, négatifs et nul, et prenant ses valeurs x dans un espace distancié $\mathcal{E}$. Nous dirons que $x = p(n)$ est une *fonction presque-périodique de la variable entière* n, lorsqu' à tout nombre $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre un entier positif $l = l(\varepsilon)$, appelé *longueur d'inclusion*, tel que parmi $l + 1$ entiers consécutifs quelconques, il existe au moins un entier τ, appelé *presque-période de* $p(n)$ *relative à* ε, pour lequel la distance $(p(n), p(n + \tau)) < \varepsilon$, quel que soit n.

Il est clair que toute fonction périodique de n est une fonction presque-périodique de n. Nous verrons plus loin qu'il existe des fonctions presque-périodiques de n sans être périodiques.

De la définition suit immédiatement qu'avec $p(n)$, la fonction $p(n + n_0)$, où n_0 désigne un nombre entier fixe, est aussi presque-périodique.

2. *Quelques propriétés immédiates.* Etant donnée une fonction presque-périodique $x = p(n)$, soit l une longueur d'inclusion relative à un nombre donné $\varepsilon > 0$. Pour tout entier n_1 et pour tout intervalle $(n_0, n_0 + l)$ de longueur l et à extrémités entières, il y a au moins un entier n_2 compris dans cet intervalle et tel que $(p(n_1), p(n_2)) < \varepsilon$. En effet, on peut trouver dans l'intervalle $(n_0 - n_1, n_0 - n_1 + l)$ une presque-période τ de $p(n)$ relative à ε. En

[4]) K. Yosida, Asymptotic almost periodicities and ergodic theorems. Proc. Imp. Acad. Japan XV (1939), p. 255—259.

[5]) Dans une lettre à l'auteur, du 6 août 1942, M. Knopp a eu l'obligeance de nous signaler que A. Walther a déjà étudié en 1928 les fonctions presque-périodiques d'une variable entière et de valeurs réelles ou complexes. Voir A. Walther, a) Fastperiodische Folgen und Potenzreihen mit fastperiodischen Koeffizienten, Abhandl. Math. Sem. Hamburg. Univ., VI. (1928), p. 217—234; b) Fastperiodische Folgen und ihre Fourierssche Analyse, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna (1928), II, p. 289—298).

renant $n_2 = n_1 + \tau$, on voit que n_2 se trouve dans l'intervalle $(n_0, n_0 + l)$ t que $(p(n_1), p(n_2)) < \varepsilon$.

Désignons maintenant par $X(p, -\infty < n < +\infty)$ l'ensemble des aleurs x de $p(n)$ quand n varie de $-\infty$ à $+\infty$. D'une façon analogue, nous ésignons par $X(p, n_0 \leqq n < +\infty)$ l'ensemble des valeurs x de $p(n)$ quand n rend toutes les valeurs entières $\geqq n_0$. En outre, on désigne comme d'habitude, ar $\bar{X}$ la fermeture de l'ensemble X. Nous avons alors, d'après ce qui précède, a proposition suivante:

Pour toute fonction presque-périodique $x = p(n)$ d'une variable entière n, m a

1) $$\bar{X}(p, -\infty < n < +\infty) = \bar{X}(p, n_0 \leqq n < +\infty),$$

uel que soit l'entier n_0. Et de plus, l'ensemble $X(p, -\infty < n < +\infty)$ est otalement borné[6]).

Comme tout ensemble totalement borné dans un espace distancié complet st compact, on a donc:

Si l'espace distancié auquel appartiennent les valeurs x de la fonction presque-ériodique $x = p(n)$, est complet, l'ensemble des valeurs x de $p(n)$ quand n varie le $-\infty$ à $+\infty$, est compact.

Supposons maintenant qu'une fonction presque-périodique $p(n)$ tende ers un point x_0 quand n tend vers $+\infty$. A tout $\varepsilon > 0$ donné on peut dé-erminer un entier $n_0 = n_0(\varepsilon)$ assez grand tel que

$$(p(n), x_0) < \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqq n_0.$$

On a alors, d'après (1),

$$(p(n), x_0) \leqq \varepsilon, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Or, ε peut être pris aussi petit que l'on veut, on a donc $p(n) \equiv x_0$. Ainsi, *la ondition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction presque-périodique de n, $= p(n)$, soit une constante abstraite x_0 est que $p(n)$ tende vers x_0 quand n tend ers $+\infty$.*

Considérons à présent une suite de fonctions presque-périodiques $p_1(n)$, $_2(n), \ldots, p_m(n), \ldots$ qui converge vers une fonction limite $p(n)$ et cela niformément sur l'ensemble des entiers n. A tout $\varepsilon > 0$, on peut faire corre-pondre un entier positif M tel que

$$(p(n), p_m(n)) < \varepsilon, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

[6]) Un ensemble X dans un espace distancié est dit *totalement borné*, si pour tout > 0 donné, X peut être décomposé en une somme d'un nombre fini de sous-ensembles le diamètres $\leqq \varepsilon$. Cf. HAUSDORFF, Mengenlehre, 3e édition, Berlin-Leipzig, 1935, p. 108.

dès que $m \geqq M$. Dès lors, si τ est une presque-période de $p_M(n)$ relative à ε, on a, quel que soit n,

$$(p(n+\tau),\ p(n)) \leqq (p(n+\tau),\ p_M(n+\tau)) + (p_M(n+\tau),\ p_M(n)) + \\ + (p_M(n),\ p(n)) < 3\,\varepsilon.$$

C'est-à-dire que τ est une presque-période de $p(n)$ relative à $3\,\varepsilon$. Donc: *la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions presque-périodiques est elle-même une fonction presque-périodique.*

On démontre facilement la proposition suivante: *Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces distanciés. Soit $x = p(n)$ une fonction presque-périodique de n et prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}_1$. Si $y = g(x)$ est une fonction définie et uniformément continue sur l'ensemble $X(p, -\infty < n < +\infty)$, prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}_2$, alors $y = g(p(n))$ est presque-périodique.*

On a aussi la proposition suivante: *Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces distanciés, dont le premier est complet. Soit $x = p(n)$ une fonction presque-périodique de n et prenant ses valeurs x dans $\mathcal{E}_1$. Si $y = g(x)$ est une fonction définie et continue sur l'ensemble $X(p, -\infty < n < +\infty)$ et prenant ses valeurs y dans $\mathcal{E}_2$, $y = g(p(n))$ est presque-périodique.*

3. *Relations avec les fonctions normales d'une variable entière.* Appelons *fonction normale* une fonction $x = f(n)$, définie pour tous les nombres entiers n, prenant ses valeurs x dans un espace distancié et telle que de toute suite

$$f(n+h_1),\ f(n+h_2),\ \ldots,\ f(n+h_m),\ \ldots,$$

où les h sont des nombres entiers arbitraires, on puisse extraire une suite

$$f(n+k_1),\ f(n+k_2),\ \ldots,\ f(n+k_m),\ \ldots,$$

qui converge uniformément (c'est-à-dire que la convergence est uniforme relativement à l'argument n) vers une fonction limite.

Cette définition est tout à fait analogue à celle des fonctions continues normales d'une variable réelle. Il est bien connu que toute fonction continue normale d'une variable réelle est continue presque-périodique au sens de H. Bohr. Inversement, si l'espace distancié auquel appartiennent les valeurs x d'une fonction continue presque-périodique $x = p(t)$ d'une variable réelle, est complet, $p(t)$ est une fonction continue normale[7]). En suivant dans leurs grandes lignes les démonstrations connues de ces théorèmes, on peut démontrer le théorème suivant:

Toute fonction normale d'une variable entière est presque-périodique. Inversement, si l'espace distancié auquel appartiennent les valeurs x d'une fonction

[7]) Cf. J. Favard, Leçons sur les fonctions presque-périodiques, Paris, 1933, p. 77—80.

presque-périodique $x = p(n)$, est complet, $p(n)$ est une fonction normale de la variable entière n.

Soit maintenant $x = p(t)$ une fonction continue normale d'une variable réelle t. Si l'on ne considère que les valeurs entières de t, on obtient une fonction $p(n)$ définie pour tous les nombres entiers. Il est clair que $p(n)$ est une fonction normale de la variable n. Il en résulte donc la proposition suivante: *Soient $\mathcal{E}$ un espace distancié complet et $x = p(t)$ une fonction continue presque-périodique d'une variable réelle t et prenant ses valeurs x dans $\mathcal{E}$. Si l'on ne considère que les valeurs entières de t, la fonction $p(n)$ est une fonction presque-périodique de la variable entière n.*

On a ainsi un moyen de former un grand nombre d'exemples de fonctions presque-périodiques d'une variable entière. Par exemple, la fonction $x = \cos t$ est une fonction continue presque-périodique de la variable réelle t, $x = \cos n$ est donc une fonction presque-périodique de la variable entière n. On observe que $\cos n$ n'est pas une fonction périodique de la variable entière n, bien que $\cos t$ soit une fonction périodique de la variable réelle t.

4. *Cas où les valeurs de la fonction appartiennent à un espace de* Banach. Supposons maintenant que l'espace distancié $\mathcal{E}$ auquel appartiennent les valeurs x d'une fonction presque-périodique $x = p(n)$, soit un espace de Banach. On voit qu'avec $p(n)$, la fonction $r \cdot p(n)$, où r désigne un nombre réel fixe, est aussi presque-périodique; il en est de même de la fonction $p(n) + x_0$, où x_0 est un point fixe dans $\mathcal{E}$ et aussi de la fonction de valeurs numériques $\|p(n)\|$. Cette dernière assertion se démontre en remarquant que

$$\big|\,\|p(n+\tau)\| - \|p(n)\|\,\big| \leqq \|p(n+\tau) - p(n)\| = (p(n+\tau), p(n)).$$

Notons encore que la somme et la différence de deux fonctions presque-périodiques sont encore presque-périodiques, car la somme et la différence de deux fonctions normales sont évidemment des fonctions normales.

Soient $p_1(n)$, $p_2(n)$ deux fonctions presque-périodiques prenant leurs valeurs dans un même espace de Banach. *S'il existe un entier N tel qu'on ait*

$$p_1(n) = p_2(n) \quad \textit{pour } n \geqq N,$$

les deux fonctions $p_1(n)$ et $p_2(n)$ sont nécessairement identiques. En effet, la différence $p_1(n) - p_2(n)$ est une fonction presque-périodique et l'on a $\lim_{n \to +\infty} [p_1(n) - p_2(n)] = 0$. Alors, d'après une proposition donnée au n° 2, $p_1(n) - p_2(n)$ est identiquement égale au point 0.

Ainsi, une fonction presque-périodique $p(n)$ dont les valeurs appartiennent à un espace de Banach, est complètement déterminée par ses valeurs pour les entiers $\geqq N$, quel que soit N.

5. *Théorème de la moyenne.* Nous allons établir le théorème suivant qui est d'une importance fondamentale:

Théorème de la moyenne. Si $x = p(n)$ est une fonction presque-périodique de n et prend ses valeurs x dans un espace de BANACH, *la moyenne arithmétique*

$$\frac{p(1) + p(2) + \ldots + p(n)}{n} \tag{2}$$

converge vers une limite déterminée quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. D'après une proposition donnée au n^0 2, l'ensemble des valeurs x de $p(n)$ quand n varie sur l'ensemble des entiers, est compact. Dès lors, la norme $||p(n)||$ est bornée sur l'ensemble des entiers. Soit B une borne supérieure de $||p(n)||$. Soient $\varepsilon > 0$ donné, $l(\varepsilon)$ une longueur d'inclusion de $p(n)$ relative à ε et M un entier > 1. Soit τ_k $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ une presque-période de $p(n)$ relative à ε et telle que

$$kM < \tau_k \leqq kM + l.$$

On a

$$\sum_{i=kM+1}^{(k+1)M} p(i) = \sum_{i=kM+1-\tau_k}^{(k+1)M-\tau_k} p(i+\tau_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) + \sum_{i=kM+1-\tau_k}^{0} p(i+\tau_k) - \sum_{i=(k+1)M-\tau_k+1}^{M} p(i+\tau_k).$$

Pour les deux derniers termes, on a

$$\left\| \sum_{i=kM+1-\tau_k}^{0} p(i+\tau_k) \right\| \leqq B(\tau_k - kM) \leqq Bl,$$

$$\left\| \sum_{i=(k+1)M-\tau_k+1}^{M} p(i+\tau_k) \right\| \leqq B(\tau_k - kM) \leqq Bl.$$

D'autre part, nous avons

$$\left\| \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) - \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| < M\varepsilon,$$

puisque τ_k est une presque-période de $p(n)$ relative à ε. De là

$$\left\| \frac{1}{nM} \sum_{i=kM+1}^{(k+1)M} p(i) - \frac{1}{nM} \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{1}{nM} \left\| \sum_{i=kM+1}^{(k+1)M} p(i) - \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) \right\| + \frac{1}{nM} \left\| \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) - \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$= \frac{1}{nM} \left\| \sum_{i=kM+1-\tau_k}^{0} p(i+\tau_k) - \sum_{i=(k+1)M-\tau_k+1}^{M} p(i+\tau_k) \right\| +$$

$$+ \frac{1}{nM} \left\| \sum_{i=1}^{M} p(i+\tau_k) - \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{2Bl}{nM} + \frac{\varepsilon}{n} = \frac{1}{n}\left(\varepsilon + \frac{2Bl}{M}\right),$$

et par conséquent

$$(3)\qquad \left\| \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{nM}\sum_{i=kM+1}^{(k+1)M} p(i) - \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| \leqq \varepsilon + \frac{2Bl}{M}.$$

Soit maintenant M' un entier compris entre nM et $(n+1)M$:

$$nM < M' \leqq (n+1)M.$$

Nous avons

$$(4)\qquad \left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{M'} p(i) - \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\|$$

$$\leqq \left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{M'} p(i) - \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\| + \left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{nM} p(i) - \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{BM}{M'} + \frac{1}{n}\left\| \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{B}{n} + \frac{1}{n}\left\| \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{2Bl}{nM}$$

$$\leqq \frac{2B}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{2Bl}{nM}.$$

De (3) et (4):

$$\left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{M'} p(i) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \left\| \frac{1}{M'}\sum_{i=1}^{M'} p(i) - \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) \right\| + \left\| \frac{1}{nM}\sum_{i=1}^{nM} p(i) - \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$

$$\leqq \frac{2B}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{2Bl}{nM} + \varepsilon + \frac{2Bl}{M}$$

$$= \frac{2B}{n} + \left(\varepsilon + \frac{2Bl}{M}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqq \frac{2B}{n} + 2\left(\varepsilon + \frac{2Bl}{M}\right).$$

Si nous considérons deux entiers M_1 et M_2, le premier dans l'intervalle $(n_1 M, (n_1+1)M)$, le deuxième dans l'intervalle $(n_2 M, (n_2+1)M)$,

les deux entiers n_1, n_2 étant tous les deux plus grands que n, nous aurons alors

$$\left\| \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} p(i) - \frac{1}{M_2} \sum_{i=1}^{M_2} p(i) \right\|$$
$$\leqq \left\| \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} p(i) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| + \left\| \frac{1}{M_2} \sum_{i=1}^{M_2} p(i) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\|$$
$$\leqq \frac{4B}{n} + 4\left(\varepsilon + \frac{2Bl}{M}\right).$$

Ceci étant, lorsque ε est donné, nous pouvons choisir tout d'abord M suffisamment grand pour que $\frac{2Bl}{M} \leqq \varepsilon$, puis un entier positif n tel que $\frac{4B}{n} \leqq \varepsilon$, on aura alors

$$\left\| \frac{1}{M_1} \sum_{i=1}^{M_1} p(i) - \frac{1}{M_2} \sum_{i=1}^{M_2} p(i) \right\| \leqq 9\varepsilon,$$

pourvu que M_1 et M_2 soient tous les deux supérieurs à nM. La moyenne arithmétique (2) converge donc vers une limite déterminée quand n tend vers $+\infty$. C. q. f. d.

La limite de la moyenne arithmétique (2) est appelée *la moyenne de la fonction* $p(n)$ et sera désignée par $\mathfrak{M}(p)$.

Si, dans la formule (3), nous faisons croître n indéfiniment, nous obtenons

$$\left\| \mathfrak{M}(p) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p(i) \right\| \leqq \varepsilon + \frac{2Bl}{M}, \tag{5}$$

inégalité valable quel que soit l'entier positif M.

Les deux fonctions $p(n)$ et $p(n+n_0)$, où n_0 désigne un entier fixe quelconque, sont presque-périodiques en même temps et l'on a

$$\mathfrak{M}(p(n)) = \mathfrak{M}(p(n+n_0)). \tag{6}$$

En effet, on a

$$\frac{p(1+n_0) + p(2+n_0) + \ldots + p(n+n_0)}{n}$$
$$= \frac{n+n_0}{n} \cdot \frac{p(1) + p(2) + \ldots + p(n+n_0)}{n+n_0} - \frac{p(1) + p(2) + \ldots + p(n_0)}{n}$$

et au second membre les deux termes tendent respectivement vers $\mathfrak{M}(p)$ et 0 quand n tend vers $+\infty$.

Comme $p(n+n_0)$ admet les mêmes presque-périodes de $p(n)$ relativement à un même nombre et avec la même longueur d'inclusion, on a, en vertu de (5):

$$\left\| \mathfrak{M}(p(n)) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} p(i+n_0) \right\| \leqq \varepsilon + \frac{2Bl}{M},$$

quel que soit l'entier n_0. En prenant $n_0 = -(M+1)$, nous avons en particulier

$$\left\| \mathfrak{M}(p(n)) - \frac{1}{M}\left(p(-1) + p(-2) + \cdots + p(-M)\right) \right\| \leqq \varepsilon + \frac{2Bl}{M}.$$

Donc:

$$(7)\quad \mathfrak{M}(p) = \lim_{n \to +\infty} \frac{p(1) + p(2) + \cdots + p(n)}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{p(-1) + p(-2) + \cdots + p(-n)}{n}.$$

II. Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière.

6. *Définition et quelques propriétés immédiates.* Nous dirons qu'une fonction $x = f(n)$ définie pour les entiers positifs et prenant ses valeurs x dans un espace distancié $\mathcal{E}$ est *asymptotiquement presque-périodique*, si elle possède la propriété suivante:

Propriété P. *A tout $\varepsilon > 0$ donné correspondent deux entiers positifs l, N tels que parmi $l+1$ entiers positifs consécutifs quelconques se trouve au moins un entier τ pour lequel*

$$(8)\qquad (f(n), f(n+\tau)) < \varepsilon \qquad \text{quand } n \geqq N.$$

Nous dirons que τ est une *presque-période asymptotique de $f(n)$ relative à ε et N.*

On peut mettre la propriété P sous une forme équivalente:

Propriété P bis. *A tout $\varepsilon > 0$ donné correspondent deux entiers positifs l, N tels que parmi $l+1$ entiers consécutifs quelconques (non nécessairement positifs) il y ait au moins un entier τ pour lequel*

$$(9)\qquad (f(n), f(n+\tau)) < \varepsilon \qquad \text{quand } n \geqq N \text{ et } n+\tau \geqq N.$$

La propriété P bis entraîne évidemment P. Inversement, soit $x = f(n)$ une fonction possédant la propriété P. Si $\varepsilon > 0$ est donné, choisissons l, N suivant la propriété P. Soient $n_0, n_0+1, \ldots, n_0+l$ $l+1$ entiers consécutifs qui ne sont pas tous positifs. Dans le cas où zéro figure parmi ces $l+1$ entiers, on pourra évidemment prendre $\tau = 0$ pour vérifier (9). Dans le cas contraire, ces $l+1$ entiers seront tous négatifs, on pourra d'abord prendre τ' parmi les $l+1$ entiers positifs $-(n_0+l), \ldots, -(n_0+1), -n_0$ de façon à vérifier (8). Posons $\tau = -\tau'$ et $m = n+\tau$, τ sera dans l'intervalle (n_0, n_0+l). On a

$$(f(m), f(m+\tau')) < \varepsilon \qquad \text{quand } m \geqq N;$$

d'où

$$(f(n+\tau), f(n)) < \varepsilon \qquad \text{quand } n+\tau \geqq N \text{ et par suite } n \geqq N.$$

Ainsi, la propriété P entraîne la propriété P bis. Les deux propriétés P et P bis sont donc équivalentes.

Etant donnée une fonction asymptotiquement presque-périodique $x = f(n)$, soient l, N deux entiers positifs correspondant à un nombre $\varepsilon > 0$ donné suivant la propriété P bis. Alors, quels que soient les entiers $n_0 \geqq N$ et $n_1 \geqq N$, il existe au moins un entier positif n_2 tel que

$$n_0 \leqq n_2 \leqq n_0 + l \quad \text{et} \quad (f(n_1), f(n_2)) < \varepsilon. \tag{10}$$

En effet, on peut trouver, d'après la propriété P bis, un entier τ (non nécessairement positif) tel que

$$n_0 - n_1 \leqq \tau \leqq n_0 - n_1 + l \quad \text{et} \quad (f(n_1), f(n_1 + \tau)) < \varepsilon,$$

puisque $n_1 \geqq N$ et $n_1 + \tau \geqq n_0 \geqq N$. En posant $n_2 = n_1 + \tau$, on voit que (10) est vérifié.

De ce fait, on conclut que *l'ensemble* $X(f, 0 < n < +\infty)$ *des valeurs d'une fonction asymptotiquement presque-périodique* $f(n)$, *quand* n *varie sur l'ensemble des entiers positifs, est totalement borné.* Par conséquent, *si l'espace distancié* $\mathcal{E}$ *auquel appartiennent les valeurs de* $f(n)$, *est complet, l'ensemble* $X(f, 0 < n < +\infty)$ *est compact.*

On établit facilement les propositions suivantes:

Soit une suite de fonctions asymptotiquement presque-périodiques $f_1(n)$, $f_2(n), \ldots, f_m(n), \ldots$ *qui converge vers une fonction limite* $f(n)$ *et cela uniformément sur l'ensemble des entiers positifs* n. $f(n)$ *est elle-même asymptotiquement presque-périodique.*

Soient $\mathcal{E}_1$ *et* $\mathcal{E}_2$ *deux espaces distanciés. Soit* $x = f(n)$ *une fonction asymptotiquement presque-périodique de* n *et prenant ses valeurs* x *dans* $\mathcal{E}_1$. *Si* $y = g(x)$ *est une fonction définie et uniformément continue sur l'ensemble* $X(f, 0 < n < +\infty)$, *prenant ses valeurs dans* $\mathcal{E}_2$, *alors* $y = g(f(n))$ *est asymptotiquement presque-périodique.*

Soient $\mathcal{E}_1$ *et* $\mathcal{E}_2$ *deux espaces distanciés, dont le premier est complet. Soit* $x = f(n)$ *une fonction asymptotiquement presque-périodique de* n *et prenant ses valeurs* x *dans* $\mathcal{E}_1$. *Si* $y = g(x)$ *est une fonction définie et continue sur l'ensemble* $X(f, 0 < n < +\infty)$ *et prenant ses valeurs* y *dans* $\mathcal{E}_2$, $y = g(f(n))$ *est asymptotiquement presque-périodique.*

7. *Les fonctions asymptotiquement normales d'une variable entière.* Une *fonction asymptotiquement normale* est une fonction $x = f(n)$ définie pour tous les entiers positifs n, prenant ses valeurs x dans un espace distancié et vérifiant la propriété suivante:

Propriété N. *De toute suite d'entiers positifs* h_m, *on peut extraire une suite* k_m, *pour laquelle la suite des fonctions* $f(n + k_m)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ *converge uniformément sur l'ensemble des entiers positifs.*

On peut mettre la propriété N sous la forme suivante:

Propriété N bis. *De toute suite d'entiers positifs h_m tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite k_m, pour laquelle la suite des fonctions $f(n+k_m)$ $(m=1,2,3,\ldots)$ converge uniformément sur l'ensemble des entiers positifs.*

Il est facile de voir que les propriétés N et N bis sont équivalentes.

Théorème 1. *Toute fonction asymptotiquement normale d'une variable entière est asymptotiquement presque-périodique.*

Démonstration. Soit $f(n)$ une fonction asymptotiquement normale. Si elle n'était pas asymptotiquement presque-périodique, il y aurait un nombre $\varepsilon_0 > 0$ auquel ne correspondrait aucun couple l, N. C'est-à-dire que pour tout couple d'entiers positifs l, N, il existerait un intervalle $L_{l,N}$ de longueur l, à extrémités entières positives et ne contenant aucune presque-période asymptotique de $f(n)$ relative à ε_0 et N.

Prenons un entier h_1 dans l'intervalle $L_1' = L_{1,1}$ et un entier h_2 tel que $h_2 - h_1$ soit dans l'intervalle $L_2' = L_{2,2}$. Puis choisissons un intervalle $L_3' = L_{\nu_3,\nu_3}$ tel que $\nu_3 > 2(h_2 - h_1)$; il est dès lors possible de déterminer un entier h_3 de façon que $h_3 - h_1$ et $h_3 - h_2$ soient dans L_3'. En général nous choisissons $L_{m-1}' = L_{\nu_{m+1},\nu_{m+1}}$ tel que $\nu_{m+1} > \underset{1<\lambda\leqq m}{\text{Max.}} 2(h_\lambda - h_1)$, $\nu_{m+1} > \nu_m$ et h_{m+1} de façon que les différences $h_{m+1} - h_\lambda$ $(1 \leqq \lambda \leqq m)$ se trouvent dans L_{m+1}'[8]).

Considérons alors la suite des fonctions

$$f(n+h_1), f(n+h_2), \ldots, f(n+h_m), \ldots, \tag{11}$$

où les h sont les entiers positifs déterminés précédemment. La fonction $f(n)$ étant asymptotiquement normale, on peut extraire de (11) une suite uniformément convergente:

$$f(n+h_{\lambda_1}), f(n+h_{\lambda_2}), \ldots, f(n+h_{\lambda_m}), \ldots.$$

Dès lors, on peut trouver un entier R tel que

$$(f(n+h_{\lambda_{r+s}}), f(n+h_{\lambda_r})) < \varepsilon_0, \quad \text{quand } r \geqq R;\ s = 1,2,3,\ldots,$$

quel que soit $n = 1, 2, 3, \ldots$ Donc: pour $r \geqq R$, $s = 1, 2, 3, \ldots$ et $n > h_{\lambda_r}$, on a

$$(f(n+h_{\lambda_{r+s}} - h_{\lambda_r}),\ f(n)) < \varepsilon_0.$$

Autrement dit, pour $r \geqq R$ et $s = 1, 2, 3, \ldots$, la différence $h_{\lambda_{r+s}} - h_{\lambda_r}$ est une presque-période asymptotique de $f(n)$ relative à ε_0 et à tout $N > h_{\lambda_r}$.

[8]) Il suffit, par exemple, de déterminer h_{m+1} en prenant pour $h_{m+1} - h_1$ l'un des entiers immédiatement voisins du milieu de L_{m+1}'.

La différence $h_{\lambda_{r+s}} - h_{\lambda_r}$ se trouve dans l'intervalle $L'_{\lambda_{r+s}}$. Laissons $r \geqq R$ fixe, nous pouvons prendre s assez grand tel que l'indice N de l'intervalle $L_{N,N} = L'_{\lambda_{r+s}}$ soit plus grand que h_{λ_r}. Pour ce choix de r, s, l'intervalle $L_{N,N} = L'_{\lambda_{r+s}}$ contient une presque-période asymptotique, à savoir $h_{\lambda_{r+s}} - h_{\lambda_r}$, de $f(n)$ relative à ε_0 et N. Nous arrivons ainsi à une contradiction. La fonction $f(n)$ est donc asymptotiquement presque-périodique. C. q. f. d.

Lemme 1. *Soient $f(n)$ une fonction asymptotiquement presque-périodique et*

$$h_1, h_2, \ldots, h_m, \ldots \tag{12}$$

une suite d'entiers positifs tendant vers $+\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un entier $l^* > 0$ et extraire de (12) *une suite*

$$h_{\nu_1}, h_{\nu_2}, \ldots, h_{\nu_m}, \ldots$$

de façon que

$$(f(n + h_{\nu_m}),\ f(n + l^*)) < \varepsilon, \qquad m = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots$$

Démonstration. La fonction $f(n)$ étant asymptotiquement presque-périodique, soient l, N deux entiers positifs correspondant à ε suivant la propriété P. Comme h_m tend vers $+\infty$, on peut supposer

$$h_m > N + l, \quad \text{pour } m \geqq M.$$

Il existe alors une presque-période asymptotique τ_m $(m = M, M+1, \ldots)$ telle que

$$h_m - N - l \leqq \tau_m \leqq h_m - N, \qquad m \geqq M$$

et

$$(f(n),\ f(n + \tau_m)) < \varepsilon, \qquad m \geqq M;\ n \geqq N.$$

En posant

$$l_m = h_m - \tau_m, \qquad m \geqq M,$$

nous avons

$$(f(n + h_m),\ f(n + l_m)) < \varepsilon, \qquad m \geqq M;\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Or, les entiers l_m sont tous $\geqq N$ et $\leqq N + l$, une infinité d'entre eux sont nécessairement égaux. Soit

$$l_{\nu_1} = l_{\nu_2} = \cdots = l_{\nu_m} = \cdots = l^*.$$

On a alors

$$(f(n + h_{\nu_m}),\ f(n + l^*)) < \varepsilon, \quad m = 1, 2, 3, \ldots;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

C. q. f. d.

Théorème 2. *Si l'espace distancié $\mathcal{E}$ auquel appartiennent les valeurs x d'une fonction asymptotiquement presque-périodique $x = f(n)$, est complet, $f(n)$ est une fonction asymptotiquement normale.*

Démonstration. Considérons une suite infinie

$$f(n+h_1), f(n+h_2), \ldots, f(n+h_m), \ldots, \tag{13}$$

où les h sont des entiers positifs tendant vers $+\infty$. Soit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_k > \cdots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro. D'après le lemme précédent, on peut trouver un entier $l^{(1)}$ et extraire de (13) une suite

$$S_1: \quad f(n+h_{\nu_1}^{(1)}), f(n+h_{\nu_2}^{(1)}), \ldots, f(n+h_{\nu_m}^{(1)}), \ldots$$

de façon que

$$\left(f(n+h_{\nu_m}^{(1)}), \quad f(n+l^{(1)})\right) < \varepsilon_1, \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Puis, on peut trouver un entier $l^{(2)}$ et extraire de la suite S_1 une suite

$$S_2: \quad f(n+h_{\nu_1}^{(2)}), f(n+h_{\nu_2}^{(2)}), \ldots, f(n+h_{\nu_m}^{(2)}), \ldots$$

de façon que

$$\left(f(n+h_{\nu_m}^{(2)}), \quad f(n+l^{(2)})\right) < \varepsilon_2, \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

et ainsi de suite: on peut trouver un entier $l^{(k)}$ et extraire de la suite S_{k-1} une suite

$$S_k: \quad f(n+h_{\nu_1}^{(k)}), f(n+h_{\nu_2}^{(k)}), \ldots, f(n+h_{\nu_m}^{(k)}), \ldots$$

de façon que

$$\left(f(n+h_{\nu_m}^{(k)}), \quad f(n+l^{(k)})\right) < \varepsilon_k, \qquad m, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

Considérons maintenant la suite des fonctions

$$f(n+h_{\nu_1}^{(1)}), f(n+h_{\nu_2}^{(2)}), \ldots, f(n+h_{\nu_k}^{(k)}), \ldots \tag{15}$$

Elle converge uniformément sur l'ensemble des entiers positifs n vers une fonction limite. En effet, soit $\varepsilon > 0$ donné et supposons que l'on ait choisi k assez grand tel que $\varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{2}$; on a alors, en vertu de (14),

$$\left(f(n+h_{\nu_{k_1}}^{(k_1)}), \quad f(n+h_{\nu_{k_2}}^{(k_2)})\right) < \varepsilon, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

dès que $k_1, k_2 \geqq k$. L'espace $\mathcal{E}$ étant complet, la suite (15) converge donc uniformément sur l'ensemble des entiers positifs. Ainsi, $f(n)$ est une fonction asymptotiquement normale. C. q. f. d.

8. *Cas où les valeurs de la fonction appartiennent à un espace de* Banach. D'après la définition donnée dans la première section, toute fonction presque-périodique d'une variable entière est définie pour tous les nombres entiers, positifs, négatifs et nul. Soit maintenant $x = p(n)$ une fonction *définie seulement pour les entiers positifs* n. Nous conviendrons de dire que $p(n)$ est presque-périodique, si elle possède la propriété suivante: A tout $\varepsilon > 0$ donné correspond un entier positif l tel que parmi $l+1$ entiers *positifs* consécutifs quelconques se trouve au moins un entier τ pour lequel

$$\left(p(n), \quad p(n+\tau)\right) < \varepsilon, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

On peut démontrer que *toute fonction presque-périodique sur l'ensemble des entiers positifs peut être prolongée d'une façon unique par une fonction presque-périodique sur l'ensemble de tous les nombres entiers.*

Cela étant admis, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théorème 3. *Toute fonction asymptotiquement presque-périodique $f(n)$, qui prend ses valeurs dans un espace de* Banach, *est une somme de deux fonctions*

$$f(n) = p(n) + \omega(n), \tag{16}$$

où $p(n)$ est presque-périodique et où $\omega(n)$ tend vers le point 0 quand n tend vers $+\infty$. D'ailleurs, la décomposition (16) *de $f(n)$ est unique.*

Inversement, toute fonction $f(n)$ de la forme (16) *est asymptotiquement presque-périodique.*

Démonstration. Etant donnée une fonction asymptotiquement presque-périodique $f(n)$ qui prend ses valeurs dans un espace de Banach, soit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_k > \cdots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro. A tout ε_k correspondent deux entiers positifs l_k, N_k tels que l'intervalle $(k, k + l_k)$ contienne un entier τ_k pour lequel

$$||f(n + \tau_k) - f(n)|| < \varepsilon_k, \qquad \text{quand } n \geqq N_k.$$

La fonction $f(n)$ étant asymptotiquement presque-périodique, elle est asymptotiquement normale, puisque tout espace de Banach est complet. On peut donc extraire de la suite des fonctions $f(n + \tau_k)$ une suite $f(n + \tau_{\nu_k})$ convergeant uniformément vers une fonction $p(n)$.

Posons $\omega(n) = f(n) - p(n)$. Je dis que $\omega(n)$ tend vers le point 0 quand n augmente indéfiniment. Soit en effet $\varepsilon > 0$ donné, on peut prendre k assez grand de façon que

$$\varepsilon_{\nu_k} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \underset{0<n<+\infty}{\text{borne sup.}} \left\| f(n + \tau_{\nu_k}) - p(n) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On aura alors

$$||\omega(n)|| \leqq ||f(n) - f(n + \tau_{\nu_k})|| + ||f(n + \tau_{\nu_k}) - p(n)|| < \varepsilon \text{ pour } n \geqq N_{\nu_k}.$$

Montrons ensuite que $p(n)$ est presque-périodique. D'après la propriété P, à tout $\varepsilon > 0$ correspondent deux entiers positifs l, N tels que sur tout intervalle de longueur l et à extrémités entières positives se trouve un entier τ pour lequel

$$||f(n + \tau) - f(n)|| < \varepsilon \qquad \text{quand } n \geqq N.$$

On a donc

$$||f(n + \tau_{\nu_k} + \tau) - f(n + \tau_{\nu_k})|| < \varepsilon \quad \text{quand } n + \tau_{\nu_k} \geqq N. \tag{17}$$

Laissons n fixe; pour k assez grand, $n + \tau_{\nu_k}$ sera $\geqq N$ et quand k tend vers $+\infty$, l'inégalité (17) deviendra

$$||p(n+\tau) - p(n)|| \leqq \varepsilon \quad \text{quel que soit l'entier positif } n.$$

Ainsi, $p(n)$ est presque-périodique.

Nous avons ainsi démontré que toute fonction asymptotiquement presque-périodique (dont les valeurs se trouvent dans un espace de Banach) est représentable sous la forme (16).

De plus, la décomposition (16) de $f(n)$ est unique. S'il en existait une autre $f(n) = p_1(n) + \omega_1(n)$ satisfaisant aux mêmes conditions, la différence $p(n) - p_1(n)$ serait une fonction presque-périodique qui tendrait vers 0 quand n augmente indéfiniment. Cette différence est donc identiquement 0.

Reste à montrer que toute fonction $f(n)$ de la forme (16) est asymptotiquement presque-périodique. On a

$$||f(n+\tau) - f(n)|| \leqq ||p(n+\tau) - p(n)|| + ||\omega(n+\tau)|| + ||\omega(n)||.$$

Or, à tout $\varepsilon > 0$ donné correspond un entier positif l tel que parmi $l+1$ entiers positifs consécutifs quelconques, il y ait au moins un entier τ vérifiant l'inégalité

$$||p(n+\tau) - p(n)|| < \tfrac{\varepsilon}{3}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

D'autre part, il existe un entier positif N tel que

$$||\omega(n)|| < \tfrac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

Dès lors,

$$||f(n+\tau) - f(n)|| < \varepsilon, \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

$f(n)$ est donc asymptotiquement presque-périodique. C. q. f. d.

L'unicité de la décomposition (16) d'une fonction asymptotiquement presque-périodique $f(n)$ permet d'appeler $p(n)$ son *terme principal* et $\omega(n)$ son *terme correctif*.

D'après les théorèmes 1—3, nous avons, dans le cas où l'espace considéré est un espace de Banach, trois définitions équivalentes des fonctions asymptotiquement presque-périodiques: on peut les définir soit comme les fonctions possédant la propriété P (ou P bis), soit comme les fonctions asymptotiquement normales, soit comme les fonctions de la forme (16). Cependant les deux premières définitions présentent sur la dernière l'avantage de garder un sens dans le cas général où l'espace considéré est seulement supposé distancié (au lieu d'être un espace de Banach). D'ailleurs ces deux premières définitions sont équivalentes dans le cas où l'espace en question est distancié complet.

D'après le théorème 3 et le théorème de la moyenne pour les fonctions presque-périodiques, on déduit immédiatement le théorème de la moyenne pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques:

Théorème 4. *Si $f(n) = p(n) + \omega(n)$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique qui prend ses valeurs dans un espace de* Banach, *la moyenne arithmétique*

$$\frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{n}$$

converge vers une limite déterminée $\mathfrak{M}(f)$ qui est égale à la moyenne $\mathfrak{M}(p)$ du terme principal $p(n)$ de $f(n)$.

Cette limite $\mathfrak{M}(f)$ sera appelée la *moyenne* de la fonction asymptotiquement presque-périodique $f(n)$. La formule (6) établie pour les fonctions presque-périodiques restera évidemment valable pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques, pourvu que n_0 soit un entier positif.

Restons toujours dans le cas où l'espace auquel appartiennent les valeurs de la fonction, est un espace de Banach. On voit aisément qu'avec $f(n) = p(n) + \omega(n)$, les fonctions $f(n + n_0)$, $r \cdot f(n)$ et $f(n) + x_0$, où n_0 désigne un entier positif fixe, r un nombre réel fixe, x_0 un point fixe dans l'espace considéré, sont aussi asymptotiquement presque-périodiques, dont les termes principaux sont respectivement $p(n + n_0)$, $r \cdot p(n)$ et $p(n) + x_0$. Il en est de même de la fonction de valeurs numériques $||f(n)||$, qui a $||p(n)||$ pour son terme p incipal. La somme $f_1(n) + f_2(n)$ de deux fonctions asymptotiquement presque-périodiques $f_i(n) = p_i(n) + \omega_i(n)$ $(i = 1, 2)$ est encore asymptotiquement presque-périodique, avec $p_1(n) + p_2(n)$ comme son terme principal.

On peut démontrer sans peine les propositions suivantes qui sont des précisions de deux propositions données au n° 6, où l'espace considéré était seulement supposé distancié:

Soit $\mathcal{E}$ un espace de Banach. *Si une suite de fonctions $f_1(n)$, $f_2(n)$, ... $f_m(n)$, . . , asymptotiquement presque-périodiques et prenant leurs valeurs dans $\mathcal{E}$, converge uniformément sur l'ensemble des entiers positifs n, la limite est une fonction asymptotiquement presque-périodique et son terme principal ainsi que son terme correctif sont respectivement les limites uniformes sur l'ensemble des entiers positifs des termes principaux $p_m(n)$ et des termes correctifs $\omega_m(n)$ de $f_m(n)$.*

Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux espaces de Banach. *Soit $x = f(n) = p(n) + \omega(n)$ une fonction asymptotiquement presque-périodique qui prend ses valeurs x dans $\mathcal{E}_1$. Si $y = g(x)$ est une fonction définie et continue sur l'ensemble $\overline{X}(f, 0 < n < +\infty)$ et prenant ses valeurs y dans $\mathcal{E}_2$, alors $y = g(f(n))$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique, dont le terme principal est $g(p(n))$*[9]).

[9]) On peut démontrer la formule

$$X(p, 0 < n < +\infty) \subset \overline{X}(f, 0 < n < +\infty),$$

a fonction $g(p(n))$ est donc bien définie.

III. Application à l'étude de l'itération des transformations continues.

9. *Itération des homéomorphies.* Enonçons d'abord le théorème suivant:

Théorème 5. *Soient E un ensemble compact et fermé de points d'un espace distancié $\mathcal{E}$ et H une homéomorphie de E en lui-même. En désignant pour tout point x de E, par $H^n x$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) l'image de x par la $n^{ième}$ itérée de H*[10]*, supposons que les $H^n x$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) considérées comme fonctions de x, soient également continues sur E*[11]*. Alors, pour tout point x_0 de E, $H^n x_0$ est une fonction presque-périodique de n.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $H^n x_0$ est une fonction normale de n. Soit $h_1, h_2, \ldots, h_m, \ldots$ une suite d'entiers arbitraires. Les points $H^{h_m} x_0$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) restent dans l'ensemble compact et fermé E. On peut donc en extraire une suite de points $H^{k_m} x_0$ convergeant vers un point x^* de E. On a

$$(H^{n+k_m} x_0,\ H^n x^*) = (H^n (H^{k_m} x_0),\ H^n x^*). \tag{18}$$

D'après l'hypothèse de la continuité égale, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\eta > 0$ tel que

$$(H^n x,\ H^n y) < \varepsilon, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

quand x, y sont deux points de E tels que $(x, y) < \eta$. Or, pour m assez grand, $m \geqq M$, on aura $(H^{k_m} x_0, x^*) < \eta$. Donc, le premier membre de (18) sera, comme le second, $< \varepsilon$ pour $m \geqq M$. Ce nombre M, comme η, a été choisi indépendamment de n. Ainsi la suite des fonctions de n, $H^{n+k_m} x_0$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) converge vers la fonction $H^n x^*$, et cela uniformément sur l'ensemble des entiers $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Dès lors, $H^n x_0$ est une fonction normale de n et par conséquent, est une fonction presque-périodique. C. q. f. d.

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du théorème 5, si x_0 est un point de E tel que*

$$H^n x_0 \neq x_0$$

pour tout nombre entier $n > 0$[12]*, l'ensemble des points $H^n x_0$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) est homéomorphe à l'ensemble des nombres rationnels.*

Démonstration. Si x_0 est un point de E tel que $H^n x_0 \neq x_0$ pour tout entier positif n, $H^n x_0$ est une fonction presque-périodique telle que ses valeurs correspondant à deux nombres entiers distincts soient toujours distinctes.

[10]) On désigne comme d'habitude par H^0 la transformation identique et par H^{-1} l'inverse de H.

[11]) C'est-à-dire qu'à tout $\varepsilon > 0$ donné correspond un nombre $\eta > 0$ tel que, pour tout $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $(H^n x, H^n y) < \varepsilon$ dès que les points x, y dans E vérifient l'inégalité $(x, y) < \eta$.

[12]) Autrement dit, $H^n x_0$ n'est pas une fonction périodique de n.

Dès lors, d'après la définition des fonctions presque-périodiques, on voit immédiatement que l'ensemble des points $H^n x_0$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) est dense en soi. On sait que tout ensemble dénombrable, dense en soi et appartenant à un espace distancié est homéomorphe à l'ensemble des nombres rationnels[13]), l'ensemble des points $H^n x_0$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) est donc homéomorphe à l'ensemble des nombres rationnels. C. q. f. d.

10. *Itération des transformations continues.* Si au lieu d'une homéomorphie, on considère une transformation continue, on obtiendra sous des hypothèses moins strictes un résultat moins précis:

Théorème 6. *Soient E un ensemble compact et fermé de points d'un espace distancié $\mathfrak{E}$ et T une transformation ponctuelle continue de E en une partie de E*[14]). *En désignant pour tout point x de E, par $T^n x$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) l'image de x par la $n^{ième}$ itérée de T, supposons que les $T^n x$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) considérées comme fonctions de x, soient également continues sur E. Alors, pour tout point x_0 de E, $T^n x_0$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n.*

La démonstration est exactement la même que pour le théorème 5, sauf qu'au lieu de prendre h_m arbitraires, on suppose que h_m est une suite d'entiers positifs. On verra alors que $T^n x_0$ est une fonction asymptotiquement normale de n et par conséquent, est une fonction asymptotiquement presque-périodique.

Il est intéressant de citer un cas particulier où toutes les hypothèses du théorème 6 sont réalisées. On appelle *contraction*[15]) toute transformation ponctuelle T qui transforme un ensemble E d'un espace distancié dans lui-même ou dans un autre et qui vérifie la condition

$$(Tx, Ty) \leqq (x, y),$$

pour tout couple de points x, y de E. Il est facile de constater que *toute contraction qui transforme un ensemble compact et fermé E d'un espace distancié en une partie de E, vérifie toutes les hypothèses du théorème 6.*

Théorème 7. *Sous les hypothèses du théorème 6, soit d'autre part une fonction $f(x)$ définie et continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace de Banach $\mathfrak{E}_1$. Alors, pour tout point x arbitrairement choisi dans E, $f(T^n x)$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. En particulier, la limite*

$$\mu(f, x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(Tx) + f(T^2 x) + \cdots + f(T^n x)}{n} \tag{19}$$

existe, quel que soit le point x dans E.

[13]) Cf. M. Fréchet, g) Les espaces abstraits, Paris, 1928, p. 103.

[14]) Bien entendu, cette partie peut se confondre avec l'ensemble E tout entier.

[15]) Cf. H. Freudenthal et W. Hurewicz, Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien. Fund. Math. **26** (1936), p. 120—122.

Pour f fixe, $\mu(f, x)$ est uniformément continue sur E. Et l'on a

20) $$\mu(f, x) = \mu(f, Tx).$$

Démonstration. En utilisant une proposition donnée à la fin du ° 6 et le théorème 6, on voit immédiatement que pour tout point x de E, $(T^n x)$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. Dès lors, 'après le théorème 4, la limite $\mu(f, x)$ existe. L'égalité (20) résulte immédiate-ıent de la formule (6).

Reste à montrer que $\mu(f, x)$ est uniformément continue sur E. La fonc-on f étant continue sur l'ensemble compact et fermé E, elle y est uniformé-ıent continue. A tout $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel qu'on ait $\|f(z) - f(w)\| < \varepsilon$ pourvu que z, w soient deux points de E vérifiant $(z, w) < \delta$. r, pour ce nombre δ, on peut trouver un nombre $\eta > 0$ tel que pour tout ouple de points x, y de E vérifiant $(x, y) < \eta$, on ait $(T^n x, T^n y) < \delta$ $n = 1, 2, 3, \ldots$). On a donc, pour tout couple de points x, y de E satisfaisant l'inégalité $(x, y) < \eta$:

$$\|\mu(f, x) - \mu(f, y)\| = \left\| \lim_{n \to +\infty} \frac{f(Tx) + \cdots + f(T^n x)}{n} - \lim_{n \to +\infty} \frac{f(Ty) + \cdots + f(T^n y)}{n} \right\|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left\| \frac{[f(Tx) - f(Ty)] + \cdots + [f(T^n x) - f(T^n y)]}{n} \right\|$$

$$\leqq \underset{0 < n < +\infty}{\text{borne sup.}} \frac{1}{n} \{\|f(Tx) - f(Ty)\| + \cdots + \|f(T^n x) - f(T^n y)\|\} \leqq \varepsilon.$$

Ainsi, $\mu(f, x)$ est uniformément continue sur E. C. q. f. d.

Dans le théorème 7, si l'on suppose $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$ et $f(x) = x$, on obtient le orollaire suivant:

Corollaire 2. *Si, dans les hypothèses du théorème 6, l'espace $\mathcal{E}$ est un espace de* Banach, *la limite*

21) $$\mu(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{Tx + T^2 x + \cdots + T^n x}{n}$$

existe, quel que soit x de E. $\mu(x)$ est uniformément continue sur E et l'on a

22) $$\mu(x) = \mu(Tx).$$

Disons qu'un point y de E est un *point de retour* d'un point x_0 de E, si suite des points $T^n x_0$ contient une sous-suite convergeant vers y. Comme s points $T^n x_0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) restent tous dans l'ensemble compact et rmé E, x_0 admet au moins un point de retour. On démontre sans peine le ésultat suivant:

Corollaire 3. *Sous les hypothèses du théorème 6, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *La suite des points* $T^n x_0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *est convergente.*

2) *Il n'y a qu'un point de retour de* x_0.

3) *Tout point de retour de* x_0 *est un point fixe dans la transformation* T.

Si, dans les hypothèses du théorème 6, l'espace $\mathfrak{E}$ *est un espace de* Banach, *chacune de ces conditions est une condition nécessaire et suffisante pour que le terme principal de la fonction asymptotiquement presque-périodique* $T^n x_0$ *soit une fonction constante.*

Corollaire 4. *Sous les hypothèses du théorème 6, l'ensemble* E_C *des points* x *de* E *tels que la suite* $T^n x$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *soit convergente est un ensemble fermé. Et la transformation* T *ne fait sortir ni de* E_C, *ni de* $E - E_C$.

Démonstration. Il est évident que la transformation T ne peut faire sortir ni de E_C ni de $E - E_C$. Reste à montrer que E_C est un ensemble fermé.

Considérons une suite de points $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ de E_C telle que $\lim_{m \to +\infty} x_m = x_0$. On a $\lim_{n \to +\infty} T^n x_m = x_m^*$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Il s'agit de prouver que la suite $T^n x_0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est convergente. Les points x_m^* restant tous dans l'ensemble compact et fermé E, on peut supposer que $\lim_{m \to +\infty} x_m^* = x^*$ (en remplaçant au besoin la suite $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ par une sous-suite). On a

$$(T^n x_0, x^*) \leqq (T^n x_0, T^n x_m) + (T^n x_m, x_m^*) + (x_m^*, x^*).$$

D'après $\lim_{m \to +\infty} x_m = x_0$, $\lim_{m \to +\infty} x_m^* = x^*$ et l'hypothèse de la continuité égale, pour tout $\varepsilon > 0$ donné on peut trouver un entier M assez grand indépendant de n tel que

$$(T^n x_0, T^n x_m) < \varepsilon, \quad (x_m^*, x^*) < \varepsilon, \qquad \text{pour } m \geqq M.$$

On a alors

$$(T^n x_0, x^*) < 2\varepsilon + (T^n x_M, x_M^*).$$

Or, $\lim_{n \to +\infty} T^n x_M = x_M^*$, on peut donc déterminer un entier N assez grand tel que

$$(T^n x_M, x_M^*) < \varepsilon, \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

Ainsi, nous avons

$$(T^n x_0, x^*) < 3\varepsilon, \qquad \text{pour } n \geqq N.$$

La suite des points $T^n x_0$ converge donc vers le point x^*. C'est-à-dire que x_0 appartient à E_C. L'ensemble E_C est donc fermé. C. q. f. d.

11. *Condition de transitivité.* Une fonction $g(x)$ définie et continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace distancié sera dite *invariante par rapport à la transformation* T, si elle vérifie l'équation

$$g(x) = g(Tx),$$

quel que soit x de E. D'après le théorème 7, $\mu(f, x)$ est une fonction invariante par rapport à T. On démontre facilement le fait suivant: Pour que $\mu(f, x)$ soit indépendant de x, quelle que soit la fonction $f(x)$ continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{E}_1$, il faut et il suffit que toute fonction invariante par rapport à T et prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}_1$ soit une fonction constante.

Pour tout point x de E, nous appellerons *successeurs de* x les points $T^n x$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). L'ensemble des successeurs de x sera désigné par S_x. Nous avons alors le théorème suivant:

Théorème 8. *Sous les hypothèses du théorème 6, pour que* $\mu(f, x)$ *soit indépendant de* x, *quelle que soit la fonction* f *continue sur* E *et prenant ses valeurs dans un espace de Banach* $\mathcal{E}_1$, *il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée*:

Condition de transitivité. *Pour tout couple de points* x, y *de* E, *la fermeture de l'ensemble des successeurs de* x *et celle de l'ensemble des successeurs de* y *ne sont pas disjointes*:

$$\bar{S}_x \cdot \bar{S}_y \neq 0. \tag{23}$$

Démonstration. Pour montrer que la condition est suffisante, il suffit de prouver que, lorsque la condition de transitivité est réalisée, toute fonction invariante par rapport à T et prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}_1$ est une fonction constante. Soit $g(x)$ une fonction invariante par rapport à T et prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}_1$. Considérons deux points x, y arbitrairement choisis dans E. D'après la condition de transitivité, il existe un point z tel que $z \in \bar{S}_x \cdot \bar{S}_y$. Le point z appartient à E, puisque E est fermé. D'autre part, la fonction $g(x)$ étant continue sur l'ensemble compact et fermé E, elle y est uniformément continue. Donc, à tout $\varepsilon > 0$ donné correspond un nombre $\delta > 0$ tel que $||g(x_1) - g(x_2)|| < \varepsilon$ pour tout couple de points x_1, x_2 de E vérifiant l'inégalité $(x_1, x_2) < \delta$. Or, pour ce nombre δ, on peut trouver deux entiers positifs n_1, n_2 tels que

$$(z, T^{n_1} x) < \delta, \quad (z, T^{n_2} y) < \delta:$$

d'où:

$$||g(z) - g(T^{n_1} x)|| < \varepsilon, \quad ||g(z) - g(T^{n_2} y)|| < \varepsilon.$$

Comme $g(T^{n_1} x) = g(x)$ et $g(T^{n_2} y) = g(y)$, on a donc

$$||g(z) - g(x)|| < \varepsilon, \quad ||g(z) - g(y)|| < \varepsilon.$$

Le nombre ε peut être pris aussi petit que l'on veut, il en résulte donc $g(x) = g(y) = g(z)$. C'est-à-dire que $g(x)$ est une fonction constante. Et par conséquent, $\mu(f, x)$ est indépendant de x, quelle que soit la fonction continue f.

La condition est nécessaire. En effet, s'il existe deux points x_0, y_0 de E tels que $\bar{S}_{x_0} \cdot \bar{S}_{y_0} = 0$, on peut définir une fonction $g(x)$ continue sur E, prenant ses valeurs dans $\mathcal{E}_1$ et telle que

$$g(x) = a \quad \text{pour} \quad x \in \bar{S}_{x_0};$$
$$= b \quad \text{pour} \quad x \in \bar{S}_{y_0};$$

a, b étant deux points distincts de $\mathcal{E}_1$. Pour cette fonction $g(x)$, on aura

$$\mu(g, x_0) = a \neq b = \mu(g, y_0).$$

C. q. f. d.

Un sous-ensemble F de E sera dit *clos par rapport à T*, si la transformation T transforme tout point de F en un point de F:

$$TF \subset F.$$

Il est facile de constater que *la condition de transitivité équivaut à la condition suivante*: *Deux sous-ensembles non vides de E qui sont fermés et clos par rapport à T, ne sont jamais disjoints.*

D'après le corollaire 2 et le théorème 8, nous avons immédiatement le corollaire suivant:

Corollaire 5. *Si, dans les hypothèses du théorème 6, l'espace $\mathcal{E}$ est un espace de* Banach *et si la transformation T vérifie la condition de transitivité, la limite $\mu(x)$, qui existe partout sur E, de*

$$\frac{Tx + T^2x + \cdots + T^nx}{n},$$

quand n tend vers $+\infty$, est indépendante de x.

Nous avons ici une condition suffisante pour que $\mu(x)$ soit indépendant de x. Mais, comme on le verra sur l'exemple 3 donné plus loin, cette condition n'est nullement nécessaire.

Envisageons maintenant quelques exemples simples:

Exemple 1. Soit E le segment fermé $0 \leqq x \leqq a$ $(a > 0)$ sur la droite des nombres réels. La transformation T définie par

$$Tx = a + (x - a) \cdot b^{-1},$$

b étant un nombre > 1, transforme tout point de E en un point de E. On a

$$|Tx - Ty| = b^{-1} \cdot |x - y| < |x - y|.$$

T est donc une contraction. Les hypothèses du théorème 6 sont alors vérifiées. On a

$$T^n x = a + (x - a) \cdot b^{-n}.$$

Dès lors, a appartient à la fermeture $\bar{S}_x$ de l'ensemble S_x des successeurs de x. La condition de transitivité est donc réalisée. On a

$$\mu(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left[na + (x - a)\,(b^{-1} + b^{-2} + \cdots + b^{-n}) \right] = a.$$

Exemple 2. Considérons dans l'espace de Hilbert, l'ensemble compact et fermé E formé par les points $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ tels que $0 \leqq x_k \leqq \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. La transformation

$$Tx = \left(\frac{1}{1 + x_1}, \quad \frac{1}{2 + x_2}, \ldots, \quad \frac{1}{k + x_k}, \ldots \right)$$

transforme tout point x de E en un point Tx de E. On vérifie facilement que T est une contraction: $(Tx, Ty) \leqq (x, y)$. Les hypothèses du théorème 6 sont donc réalisées. Il est aisé de voir que T vérifie aussi la condition de transitivité. $\mu(x)$ est donc indépendant de x. On trouve effectivement

$$\mu(x) = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-2 + \sqrt{8}}{2}, \ldots, \quad \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}, \ldots \right).$$

Exemple 3. Appelons E le segment fermé $0 \leqq x \leqq 1$ sur la droite des nombres réels et T la transformation

$$Tx = 1 - x.$$

Les hypothèses du théorème 6 sont évidemment remplies. Mais T ne vérifie pas la condition de transitivité. On peut trouver une fonction $f(x)$ continue sur E telle que $\mu(f, x)$ soit dépendant de x. On a, par exemple, pour $f(x) = x^2$, $\mu(f, x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$. Cependant, $\mu(x)$ est indépendant de x: $\mu(x) = \frac{1}{2}$.

12. *Application à la théorie des probabilités discontinues en chaîne.* Soient $P_{hk}^{(1)}$ $(1 \leqq h, k \leqq m)$ m^2 nombres réels tels que

$$\sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \leqq 1, \qquad 1 \leqq h \leqq m. \tag{24}$$

Appelons E l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de l'espace euclidien à m dimensions tels que $|x_i| \leqq A$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, A étant une constante positive. Soit T la transformation linéaire définie par

$$x_h^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(1)} \cdot x_k, \qquad 1 \leqq h \leqq m.$$

T transforme chaque point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de E en un point $Tx = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)})$ de E. En effet, on a, en vertu de (24),

$$|x_h^{(1)}| = |\sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(1)} \cdot x_k| \leqq \sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \cdot |x_k| \leqq A \cdot \sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \leqq A.$$

D'autre part, dans l'espace euclidien à m dimensions, on peut prendre pour la distance de deux points $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ la quantité $\varrho(x, y) = \underset{1 \leqq i \leqq m}{\text{Max.}} |x_i - y_i|$; cela n'apporte aucun changement à la structure topologique de l'espace. Nous avons

$$|x_h^{(1)} - y_h^{(1)}| = |\sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(1)} \cdot (x_k - y_k)| \leqq \sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \cdot |x_k - y_k|$$

$$\leqq (\underset{1 \leqq k \leqq m}{\text{Max.}} |x_k - y_k|) \cdot \sum_{k=1}^{m} |P_{hk}^{(1)}| \leqq \underset{1 \leqq k \leqq m}{\text{Max.}} |x_k - y_k|,$$

d'où

$$\varrho(Tx, Ty) \leqq \varrho(x, y).$$

Cela veut dire que la transformation T est une contraction quand on prend ϱ pour la distance dans l'espace euclidien à m dimensions. Dès lors, $T^n x$ considérées comme fonctions de x sont également continues sur E.

D'après le théorème 6, pour chaque point x de E, $T^n x$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. D'autre part, en posant

$$P_{hk}^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} P_{hj}^{(n-1)} \cdot P_{jk}^{(1)}, \qquad 1 \leqq h, k \leqq m;\ n = 2, 3, \ldots, \tag{25}$$

les coordonnées $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ du point $T^n x$ sont données par

$$x_h^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(n)} \cdot x_k.$$

La $h^{ième}$ coordonnée x_h d'un point $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dépend continûment du point x. Il en résulte donc que, pour tout point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de E et pour toute valeur fixe de h,

$$\sum_{k=1}^{m} P_{hk}^{(n)} \cdot x_k$$

est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. En particulier, on voit que pour tout couple de h, k, $P_{hk}^{(n)}$ est une fonction asymptotiquement presque-périodique de n. Nous avons ainsi redémontré d'une façon très simple un résultat connu dû à M. Fréchet[16]: *Si les quantités* $P_{hk}^{(n)}$ $(1 \leqq h, k \leqq m;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ *vérifient les relations* (24) *et* (25), *alors pour tout couple fixe de* h, k, $P_{hk}^{(n)}$ *est une fonction asymptotiquement presque-périodique de* n *et par conséquent, la suite* $P_{hk}^{(1)}, P_{hk}^{(2)}, \ldots, P_{hk}^{(n)}, \ldots$ *converge au sens de* Cesàro. Ce

[16]) M. Fréchet, l. c. e), p. 256.

résultat se réduira à un théorème bien connu dans la théorie des probabilités discontinues en chaîne, quand les $P_{hk}^{(n)}$ sont les probabilités de passage pour une chaîne de Markoff, constante, simple et à un nombre fini d'états possibles.

13. *Retour au théorème de la moyenne pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques.* Le théorème 7 a été établi en utilisant le théorème de la moyenne pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière. Nous allons maintenant montrer qu'on peut considérer ce théorème de la moyenne comme un cas particulier du théorème 7.

Considérons l'espace fonctionnel $\mathfrak{F}$ constitué par les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière et prenant leurs valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{E}$. On prend dans $\mathfrak{F}$ pour distance de deux points f, g l'expression

$$(f, g) = \underset{0 < n < +\infty}{\text{borne sup.}} \|f(n) - g(n)\|.$$

$\mathfrak{F}$ est évidemment un espace de Banach.

Soit maintenant $g_0(n)$ une fonction asymptotiquement presque-périodique qui prend ses valeurs dans $\mathcal{E}$. Pour démontrer l'existence de la moyenne $\mathfrak{M}(g_0)$, considérons l'ensemble G formé par la fonction $g_0(n)$ et les fonctions de la forme $g_0(n + h)$, où h est un nombre entier positif. D'après la propriété N, G est un ensemble compact dans l'espace $\mathfrak{F}$. La fermeture E de l'ensemble G est donc compact et fermé. Appelons maintenant T la transformation qui transforme un point $f(n)$ de E en $Tf = f(n + 1)$. On vérifie sans peine que les hypothèses du théorème 6 sont toutes remplies. Dès lors, d'après le théorème 7, l'expression

$$\frac{g_0(n+1) + g_0(n + 2) + \cdots + g_0(n + m)}{m}$$

converge uniformément vers une fonction de n, quand m tend vers $+\infty$. Il en résulte en particulier que la limite de

$$\frac{g_0(1) + g_0(2) + \cdots + g_0(m)}{m}$$

existe, quand m tend vers $+\infty$. Ainsi, on peut déduire du théorème 7 le théorème de la moyenne pour les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière.

14. *Décomposabilité et indécomposabilité.* Nous avons obtenu au n° 11 une condition nécessaire et suffisante pour que $\mu(f, x)$ soit indépendant de x, quelle que soit la fonction f continue sur E et prenant ses valeurs dans un espace de Banach. Considérons maintenant le cas où f est une fonctionnelle réelle et allons étudier l'indépendance presque certaine en introduisant une probabilité de distribution des positions de x dans E.

Restons dans les hypothèses du théorème 6, soit $\mathfrak{R}$ le plus petit corps borelien engendré par ceux de sous-ensembles de E qui sont relativement ouverts dans E. Supposons qu'on ait défini sur $\mathfrak{R}$ une fonction d'ensemble, $P(A)$, complètement additive, de valeurs non négatives et telle que $P(E) = 1$. C'est-à-dire qu'on a défini une probabilité $P(A)$ qu'un point x pris au hasard dans E soit situé dans un ensemble A, A étant un élément quelconque de $\mathfrak{R}$. Pour toute fonctionnelle réelle $f(x)$ définie et continue sur E et pour tout nombre réel r, désignons par $\underset{x}{E}\{\mu(f, x) < r\}$ l'ensemble des points x de E tels que $\mu(f, x) < r$. Il est clair que l'ensemble $\underset{x}{E}\{\mu(f, x) < r\}$ est relativement ouvert dans E et par conséquent il est un élément de $\mathfrak{R}$. Pour chaque f fixe. $\mu(f, x)$ est une variable aléatoire quand on choisit au hasard le point x dans E. Appelons $F(f, r)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $\mu(f, x)$:

$$F(f, r) = P\left(\underset{x}{E}\{\mu(f, x) < r\}\right).$$

Deux cas alors se présentent:

1$^{\text{er}}$ cas: Pour au moins une fonctionnelle $f_0(x)$ continue sur E, $F(f_0, r)$ prend au moins une valeur $F(f_0, r_0)$ différente de 0 et 1. Posons

$$E_1 = \underset{x}{E}\{\mu(f_0, x) < r_0\}, \quad E_2 = E - E_1.$$

Les probabilités $P(E_1) = F(f_0, r_0)$ et $P(E_2)$ sont toutes les deux différentes de 0 et 1. Or, d'après (20), les ensembles E_1, E_2 sont clos par rapport à T. Ainsi, dans ce cas, E est *décomposable* [relativement à la fonction d'ensemble $P(A)$], entendant par là que E est une somme de deux ensembles E_1, E_2, disjoints et clos par rapport à T et tels qu'il y ait une probabilité positive qu'un point x pris au hasard dans E soit dans E_1 et une probabilité positive qu'il soit dans E_2.

2$^{\text{e}}$ cas: Si E n'est pas décomposable de cette manière, $F(f, r)$ ne peut, quelle que soit la fonctionnelle $f(x)$ continue sur E, prendre que les valeurs 0 et 1. Quand f reste fixe et r varie de $-\infty$ à $+\infty$, $F(f, r)$ ne pouvant décroître, passe donc de la valeur 0 à la valeur 1 pour une certaine valeur r_0 de r (r_0 dépendant de f)[17]. C'est-à-dire que $\mu(f, x)$ prend presque certainement la même valeur r_0.

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant:

Théorème 9. *Sous les hypothèses du théorème 6, soit $\mathfrak{R}$ le plus petit corps borelien engendré par ceux de sous-ensembles de E qui sont relativement ouverts*

[17]) L'ensemble E étant compact et fermé, la fonctionnelle $f(x)$ continue sur E y est nécessairement bornée: $a \leqq f(x) \leqq b$. On a donc $a \leqq \mu(f, x) \leqq b$ pour tout point x de E. Dès lors, $F(f, r) = 0$ pour $r \leqq a$ et $F(f, r) = 1$ pour $r > b$.

dans E. Supposons qu'on ait défini, pour tout élément A de $\mathfrak{R}$, *une probabilité* $P(A)$ *qu'un point x pris au hasard dans E soit dans le sous-ensemble A. Alors, ou bien E est décomposable en deux ensembles (appartenant à* $\mathfrak{R}$*) disjoints, de probabilités positives et clos par rapport à la transformation T; ou bien E n'est pas décomposable de cette manière.*

Si, dans le cas indécomposable, f est une fonctionnelle réelle continue sur E la limite $\mu(f, x)$, *qui partout existe sur E, de*

$$\frac{f(Tx) + f(T^2x) + \cdots + f(T^nx)}{n},$$

quand n tend vers $+\infty$, *est presque certainement la même sur E.*

Observons enfin qu'on déduit immédiatement du corollaire 4 le fait suivant: *Dans le cas indécomposable, quand on choisit au hasard le point x dans E, la probabilité que la suite* T^nx ($n = 1, 2, 3, \ldots$) *soit convergente ne peut être que* 0 *ou* 1.

(Eingegangen am 3. Juni 1942.)

Über das ϑ im verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Von

Gerhard Grüß in Freiberg (Sa).

Die Funktion $f(x)$ sei für $a \leqq x \leqq b$ stetig, g sei ihr absolutes Minimum, G ihr absolutes Maximum im Bereich. Dann kann in der Abschätzung

$$(b-a)\,g \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq (b-a)\,G$$

das eine oder das andere Gleichheitszeichen bekanntlich nur gelten, wenn $g = G$, also $f(x)$ in $a \ldots b$ konstant ist. Daraus folgt leicht, daß das ϑ in der Gleichung des Mittelwertsatzes

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(a+\vartheta(b-a))$$

nicht nur der Ungleichheit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, sondern sogar der durch Unterdrückung der Gleichheitszeichen verschärften Abschätzung $0 < \vartheta < 1$ genügt. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß die Aussage des verallgemeinerten Mittelwertsatzes in demselben Sinne verschärft werden kann, was nicht allgemein bekannt zu sein scheint und auch nicht so selbstverständlich ist wie im Fall des gewöhnlichen Mittelwertsatzes.

Sei also $f(x)$ stetig und $p(x)$ eigentlich integrierbar und nicht-negativ im Bereich $a \leqq x \leqq b$, ferner $g = \min f(x)$ und $G = \max f(x)$ in $a \ldots b$. Dann wird behauptet, daß es mindestens eine Zahl ϑ im *Innern* des Bereiches $0 \ldots 1$ gibt, die der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(a+\vartheta(b-a)) \int_a^b p(x)\,dx$$

genügt.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt

$$(+) \qquad g \int_a^b p(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,p(x)\,dx \leqq G \int_a^b p(x)\,dx.$$

Wenn nun $\int_a^b p(x)\,dx = 0$ ist, so wird die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = 0 = f(a+\vartheta\,(b-a)) \cdot 0$$

durch *jede* beliebige Zahl ϑ im Bereich $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ befriedigt. Sei also $\int_a^b p(x)\,dx = A > 0$. Dann folgt aus (+)

$$g \leqq \frac{\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx} \leqq G.$$

Wohlbemerkt kann hier das eine oder andere Gleichheitszeichen gelten, ohne daß $g = G$ wäre! Zum Beispiel ist $g\int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,p(x)\,dx$, wenn

$$f(x) = g, \qquad p(x) = p_0 > 0 \text{ konstant für } a \leqq x \leqq c,$$
$$f(x) = g + \frac{x-c}{b-c}(G-g),\ p(x) = 0 \qquad \text{für } c \leqq x \leqq b \text{ gilt.}$$

Deshalb ist es hier nicht möglich, so einfach wie im Fall des gewöhnlichen Mittelwertsatzes zu schließen, daß $\eta = \frac{\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}$ [außer für $f(x) = \text{konst}$] größer als g und kleiner als G und daher gleich $f(\xi)$ sein müsse für irgendein $\xi = a + \vartheta(b-a)$ im Innern von $a \ldots b$. Vielmehr überlege man so:

Die Behauptung

$$\eta = \frac{\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx} = f(a + \vartheta(b-a)), \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

ist gewiß richtig, wenn (wie beim Beweis des gewöhnlichen Mittelwertsatzes) $g < \eta < G$, und natürlich auch, wenn $g = \eta = G$ gilt. Es bleibt also nur der Fall zu klären, daß entweder $g = \eta < G$ oder $g < \eta = G$ ist, und man darf sich offensichtlich darauf beschränken, die eine dieser beiden Möglichkeiten zu untersuchen.

Sei etwa $g = \eta < G$, also $g\int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,p(x)\,dx$ oder $\int_a^b (f(x) - g)\,p(x)\,dx = 0$. Dann nimmt $f(x)$, wie behauptet wird, den Wert $\eta = g$ gewiß im *Innern* von $a \ldots b$ an, wenn nur für irgendein ξ, $a < \xi < b$, $g = \min f(x) = f(\xi)$ ist. Der Fall $f(x) \neq \eta$ für $a < x < b$ kann also überhaupt nur dann eintreten, wenn außer der Voraussetzung $\int_a^b (f(x) - g)\,p(x)\,dx = 0$ noch die weitere

erfüllt ist, daß $f(x) > g$ gilt für $a < x < b$, und daher bleibt nur zu zeigen, daß die drei Voraussetzungen:

$$\int_a^b p(x)\,dx = A > 0,\ \int_a^b (f(x)-g)\,p(x)\,dx = 0,\ f(x) > g \quad \text{für} \quad a < x < b$$

nicht miteinander verträglich sind.

In der Tat folgt aus $\int_a^b p(x)\,dx = A > 0$ und $f(x) - g = q(x) > 0$ für $a < x < b$, daß $\int_a^b (f(x)-g)\,p(x)\,dx = \int_a^b q(x)\,p(x)\,dx$ positiv ist, also nicht verschwindet. Denn da die Integrale $\int_a^x p(x)\,dx$ und $\int_x^b p(x)\,dx$ in x stetig sind, kann die Zahl $\alpha > 0$ so klein gewählt werden, daß $\int_{a+\alpha}^{b-\alpha} p(x)\,dx > \frac{A}{2}$ gilt; weiter ist die stetige Funktion $q(x) = f(x) - g$ im abgeschlossenen Bereich $a + \alpha \ldots b - \alpha$ überall positiv und hat daher ein positives Minimum q_0. Schließlich ist wegen $q(x)\,p(x) \geqq 0$

$$\int_a^b q(x)\,p(x)\,dx \geqq \int_{a+\alpha}^{b-\alpha} q(x)\,p(x)\,dx \geqq q_0 \int_{a+\alpha}^{b-\alpha} p(x)\,dx > q_0 \cdot \frac{A}{2}$$

positiv.

Damit ist die Behauptung in vollem Umfang bewiesen[1]).

---

[1]) Nach Abschluß der Korrekturen bemerke ich erst heute, am 11. Januar 1943, daß E. JACOBSTHAL die hier mitgeteilte Verschärfung des Mittelwertsatzes bereits 1940 in seiner Abeit „Über den Mittelwertsatz der Integralrechnung". Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandlinger Bd. XIII. Nr. 8, bewiesen hat. Sein Beweis und der meine sind zwar ähnlich, sie unterscheiden sich aber doch so weit, daß die Veröffentlichung auch meines Beweises gerechtfertigt sein dürfte.

(Eingegangen am 20. August 1942.)

Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen.

Zweiter Teil.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Einleitung.

Wie im ersten Teil der Arbeit[1]) dargelegt worden ist, entspringen *Halbverband* und *kommutative Semigruppe* einer gemeinsamen Wurzel, und zwar wurde das *Holoid* als der beide umfassende Operationsbereich aufgezeigt. Das Holoid erweist sich damit als ein Fundamentalbegriff, nicht in bezug auf die *inhaltliche*, wohl aber in bezug auf die *formale* Seite der Mathematik[2]). Die große Bedeutung, die diesem Begriff zukommt, läßt es nicht zu, daß das Holoid nur so nebenbei am Rande irgendeiner Abhandlung erwähnt wird, sondern macht es zur wissenschaftlichen Pflicht, das Holoid in den Mittelpunkt einer eigenen Untersuchung zu stellen.

---

[1]) Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen. Erster Teil. Math. Zeitschr. 48 (1942), S. 275–288 = [H S. 1]. Die Kenntnis dieser Arbeit wird vorausgesetzt.

[2]) Daß in jeder Erkenntnis, insbesondere in jeder *mathematischen* Erkenntnis, eine *anschaulich-inhaltliche* Komponente mit einer *begrifflich-formalen* Komponente verschmolzen ist, darüber herrscht seit langem volle Einmütigkeit. Dagegen scheiden sich die Geister sofort, sobald man nach dem Anteil fragt, den jede der beiden Komponenten an der mathematischen Erkenntnis hat. Dieser Kampf an den Grenzen der Mathematik ist so alt wie die Mathematik selbst. Sein Rhythmus wird in erster Linie von den epochalen und säkularen weltanschaulichen Strömungen, sodann aber auch von Offensivgeist, Temperament und Charakter der angetretenen Kämpfer bestimmt. Zu den Stürmern und Drängern gehört M. Steck, der mit seiner Streitschrift „Das Hauptproblem der Mathematik“ (Berlin 1942) zum Angriff schreitet. Der Verfasser liegt vor allem in Fehde mit den Richtungen, die den logischen Gehalt der mathematischen Erkenntnis betonen, also mit den Richtungen, deren führende Männer D. Hilbert, B. Russell und H. Scholz sind. Eine besonders scharfe Attacke reitet Steck gegen die Logistik, die ihm eine gänzlich hohle Nuß am Baum der mathematischen Erkenntnis ist. Als Philosoph bekennt sich M. Steck zu Kant; genauer dürfte seine Position in der Nachbarschaft der Friesschen Schule zu suchen sein, deren Exponent in philosophischer Hinsicht bekanntlich Leonard Nelson, in mathematischer Hinsicht Gerhard Hessenberg ist. Doch muß ich gestehen, daß es für einen Mathematiker

Nachdem wir im ersten Teil die Theorie der Holoide in großen Zügen entwickelt haben, wollen wir nunmehr auf einzelne Punkte genauer eingehen. Im vorliegenden zweiten Teil beschäftigen wir uns mit den *linearen* Holoiden, deren Herausstellung im Hinblick auf die linearen Verbände und Semigruppen wünschenswert ist. Wenn auch die Struktur des linearen Holoids von nur wenigen und überdies recht einfachen Gesetzen bestimmt wird und infolgedessen leicht zu übersehen ist, so darf man doch nicht glauben, daß es sich bei diesem Holoid um nichts weiter als um eine farblose und verwaschene Verallgemeinerung von Verband und Semigruppe handelt; im Gegenteil, bei näherem Zusehen wird man bald gewahr, daß das lineare Holoid ein Operationsbereich mit sehr merkwürdigen und charakteristischen Eigenschaften ist und deshalb an sich Interesse verdient.

Im einzelnen liegt der Arbeit der folgende Plan zugrunde. § 1 enthält einen auf die Bedürfnisse der vorliegenden Untersuchung zugeschnittenen Auszug aus der allgemeinen Theorie; wegen der Beweise der Sätze verweisen wir auf [H/S. 1]. Durch ein zusätzliches Axiom gelangen wir in § 2 zum linearen Holoid. In einer Reihe von Sätzen arbeiten wir die besonderen Eigenschaften desselben heraus. § 3 stellt den Kern der Arbeit dar. Wir entwickeln darin eine Regel, die es gestattet, das Ergebnis der Verknüpfung von irgendwelchen Elementen des Holoids anzugeben. Die Regel kann leicht gehandhabt werden und ist deswegen für die Praxis des Holoidkalküls von Wichtigkeit.

Da man, was Sinn und Wesen der *axiomatischen Methode* anbetrifft, neuerdings auf die verschiedensten Ansichten stößt, möchte ich mich, um hinsichtlich meiner Auffassung keine Mißverständnisse aufkommen zu lassen, auch einmal kurz über diesen Punkt äußern. Meine Ausführungen tragen provisorischen Charakter; ich hoffe, demnächst Gelegenheit zu einer ausführlichen Darstellung zu finden.

Die logische Analyse der Begriffe einer mathematischen Disziplin führt, wenn sie weit genug getrieben wird, schließlich auf Begriffe, die man nicht

---

schwierig ist, die Position eines Ontologen richtig auszumachen. Wenn es sich bei dem STECKschen Buch auch vornehmlich um eine Streitschrift handelt, die als solche an den Geschmack und die Neigungen des Lesers appellieren darf, wobei es auf die Güte der Argumentation weniger ankommt, so müssen doch die Waffen stark befremden, deren sich STECK bedient, um Männer abzutun, die sich um die deutsche Mathematik sehr verdient gemacht haben.

Meine Ausführungen werden dem einen oder dem anderen an dieser Stelle vielleicht ungewöhnlich vorkommen. Ich mußte mich aber äußern, weil es in diesem Kampf für manchen unter uns um den Sinn und damit um den Wert der Arbeit seines Lebens geht.

mehr reduzieren kann oder nicht mehr reduzieren will. Bei einem systematischen Aufbau der betreffenden Theorie fungieren diese Begriffe als nichtdefinierte Grundbegriffe. Ich sehe als derartige Grundbegriffe u. a. die Begriffe *Menge*, *Beziehung* und *Verknüpfung* an. Nach meiner Ansicht ist eine strenge Definition derselben nicht möglich, was natürlich keineswegs ausschließt, daß diese Begriffe mehr oder weniger vollständig beschrieben, umschrieben oder erläutert werden können. Doch verzichte ich auf eine Beschreibung, weil ich glaube voraussetzen zu dürfen, daß der Leser weiß, was unter einer Menge, unter einer Beziehung und unter einer Verknüpfung zu verstehen ist. Betonen will ich nur, daß ich diese Begriffe als *inhaltlich* fundiert ansehe. Das soll besagen, daß wir uns dieser Begriffe durch Anschauung und Erfahrung *bewußt* werden; es soll aber nicht besagen, daß diese Begriffe erst durch Anschauung oder Erfahrung in unserem Bewußtsein *erzeugt* werden. Diese Begriffe ruhen zunächst verborgen in unserem Denkvermögen; Anschauung und Erfahrung sind nur die Gelegenheitsursachen, die uns auf unseren Besitz aufmerksam machen. Noch mehr: Die genannten Begriffe sind Kategorien, Kantische Kategorien. Sie sind es, die in das Chaos der uns durch die Sinne vermittelten Eindrücke Ordnung bringen und uns damit die Umwelt verständlich machen.

Damit glaube ich, meine prinzipielle Einstellung zu einer Kernfrage der Axiomatik einigermaßen deutlich umrissen zu haben. Vermutlich wird den Radikalen verschiedener Richtungen dieser Standpunkt als rückständig erscheinen; sie werden ihn vielleicht nachsichtig und herablassend als „naiv" bezeichnen. Doch sei ihnen das nicht übel genommen; es soll uns auch nicht weiter beunruhigen.

Betrachten wir nun ein Axiomensystem. Dasselbe hat als Unterlage eine Menge, deren Elemente einer Beziehung oder einer Verknüpfung fähig sind. Vorläufig haben wir es nur mit Verknüpfungen zu tun. Die Leistung eines Axiomensystems besteht nach unserer Auffassung darin, daß es die unterlegte Menge zugleich mit einer gewissen Verknüpfung näher bestimmt. Nach dieser Auffassung ist die axiomatische Methode nichts anderes als eine Methode der *Spezifikation*, indem die allgemeinen Begriffe der Menge und Verknüpfung durch zusätzliche Bedingungen, wie sie in den Axiomen vorliegen, eingeschränkt werden.

Diese Auffassung, daß nämlich durch ein vorgegebenes Axiomensystem eine *spezielle* Menge in Verbindung mit einer *speziellen* Verknüpfung definiert wird, liegt der modernen *algebraischen* Axiomatik zugrunde, wie sie bei der Aufstellung der Begriffe Verband und Gruppe, Ring, Körper usw. zum Ausdruck kommt; man vergleiche auch die Definition des Holoids in Erklärung 1 der vorliegenden Arbeit.

Dagegen nimmt die *geometrische* Axiomatik bei der üblichen Behandlung eine leichte Akzentverschiebung vor. Danach definiert ein geometrisches Axiomensystem nicht die unterlegte Menge selbst, d. h. nicht den Raum, sondern implizite die Elemente, aus denen die unterlegte Menge, also der Raum, besteht. Dieser Unterschied gegenüber der algebraischen Axiomatik spiegelt sich darin wider, daß z. B. HILBERT die *Elemente* durch besondere Namen — Punkt, Gerade, Ebene — auszeichnet, dagegen die unterlegte Menge, von der niemals die Rede ist, namenlos läßt. Die algebraische Axiomatik verfährt gerade umgekehrt.

Wir machen noch darauf aufmerksam, daß wir in dieser Arbeit nur solche Holoide zulassen, die entweder aus *endlich vielen* oder aus *abzählbar vielen* Elementen bestehen. Höhere Mächtigkeiten werden absichtlich nicht in Betracht gezogen[3]). Das im Wesen der natürlichen Zahlen verankerte Schlußverfahren der vollständigen Induktion wird weitgehend in Anspruch genommen.

§ 1.

Das Holoid.

Erklärung 1. Eine Menge M heiße ein *Holoid* in bezug auf eine durch $\bigcirc$ symbolisierte Verknüpfung, kurz ein $\mathfrak{H}(\bigcirc)$, wenn die folgenden fünf *Axiome* in Kraft sind:

A I. Sind a, b zwei beliebige Elemente aus M, so gibt es in M ein eindeutig bestimmtes Element c derart, daß — in dieser Reihenfolge —

$$a \bigcirc b = c$$

gilt.

A II. Für drei beliebige Elemente a, b, c aus M gilt

$$(a \bigcirc b) \bigcirc c = a \bigcirc (b \bigcirc c).$$

A III. Für zwei beliebige Elemente a, b aus M gilt

$$a \bigcirc b = b \bigcirc a.$$

A IV. Es gibt in M ein Element e derart, daß für jedes Element a aus M

$$a \bigcirc e = a$$

gilt.

[3]) Ich bin nicht mehr restlos davon überzeugt, daß unendliche Mengen, die nicht abzählbar sind, widerspruchslos gedacht werden können.

A V. Sind a, b und x, y Elemente aus M derart, daß

$$a = b \circ x, \quad b = a \circ y$$

gilt, so ist

$$a = b.$$

Die Verknüpfung $\circ$ werde als „Multiplikation" bezeichnet. Demgemäß verwenden wir auch die Ausdrücke „Produkt", „Faktoren" und „Potenz". Wir stellen die Potenz in der üblichen Weise dar. Die Potenzregeln der gewöhnlichen Algebra sind in Kraft:

$$(1) \qquad a^m \circ a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^m \circ b^m = (a \circ b)^m,$$

wobei m und n natürliche Zahlen sind.

Erklärung 2. Ein Holoid werde als *endlich* oder *unendlich* bezeichnet, je nachdem es aus endlich oder unendlich vielen Elementen besteht. Unter der *Ordnung* eines endlichen Holoids werde die Anzahl der verschiedenen Elemente verstanden, aus denen das Holoid besteht.

Das Element e des Axioms A IV ist eindeutig bestimmt; es wird als die *untere Spitze* oder als das *unterste* Element von M bezeichnet. Setzt man, wenn a ein beliebiges Element aus M ist,

$$a^0 = e,$$

so gelten die Formeln (1) nicht nur für natürliche, sondern bereits für *nichtnegative* ganze Zahlen m und n.

Für endliche, aber nicht mehr für unendliche Holoide läßt sich die Existenz einer *oberen Spitze* oder eines *obersten* Elementes beweisen, worunter ein Element f zu verstehen ist derart, daß für jedes Element a aus M

$$a \circ f = f$$

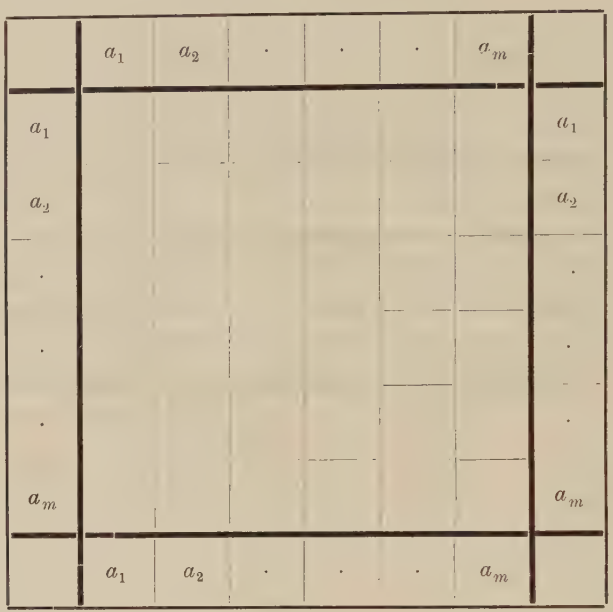
gilt.

Wegen des Axioms A I kann man jedem endlichen Holoid in einfacher Weise eine quadratische Tafel zuordnen, aus der sofort das Produkt zweier Elemente abgelesen werden kann. Das Schema, das seit langem bekannt ist und in Theorie und Praxis vielfach Anwendung gefunden hat, wird folgendermaßen hergestellt. Man bringe die Elemente des Holoids, die zu diesem Zweck mit

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

bezeichnet seien, in den Feldern eines passend eingerichteten Quadrates unter, und zwar ordne man die Elemente so ein, daß das Durchschnittsfeld der i-ten Zeile und der k-ten Spalte von dem Element $a_i \circ a_k$ eingenommen wird. Das ausgefüllte Quadrat ist wegen A III symmetrisch in bezug auf

die von links oben nach rechts unten verlaufende Diagonale. Die Leerform sieht so aus:



Erklärung 3. Sind a, b Elemente aus M, wobei M ein $\mathfrak{H}(\bigcirc)$ ist, so sei dann und nur dann

$$a \supseteq b,$$

wenn es in M wenigstens ein Element x gibt derart, daß

$$a = b \bigcirc x$$

gilt. Mit $a \supset b$ sei $b \subseteq a$ gleichbedeutend. Findet $a \supset b$ statt, so heiße a ein *Oberelement* von b und umgekehrt b ein *Unterelement* von a. Daß a ein Oberelement bzw. Unterelement von b ist, drücken wir auch durch die Wendung aus: a befindet sich „oberhalb" bzw. „unterhalb" von b. Für

$$a \supseteq b,\ b \supset c \quad \text{bzw.} \quad a \subseteq b,\ b \subseteq c$$

werde kürzer

$$a \supseteq b \supseteq c \quad \text{bzw.} \quad a \subseteq b \subseteq c$$

geschrieben. Gilt

$$a \supset b \supset c \quad \text{oder} \quad a \subset b \subset c,$$

so sagen wir, daß sich b „zwischen" a und c befindet.

Die Beziehung $\supset$ ist transitiv und reflexiv. Ferner kommen ihr die in den folgenden Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften zu.

Satz 1.1. *Für jedes a gilt $a \supseteq e$ und, falls das oberste Element existiert, das dann mit f bezeichnet sei, auch $f \supseteq a$.*

Satz 1.2. *Mit*

$$a \supseteq b, \quad b \supset a$$

gilt $a = b$.

Satz 2.1. *Sind*

(2) $$a_1, \ldots, a_n$$

Elemente aus M derart, daß

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = e$$

gilt, so ist

$$a_\nu = e \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Satz 2.2. *Zu vorgegebenen Elementen* (2) *gibt es mindestens ein Element x derart, daß gilt*

$$x \supseteq a_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Satz 2.3. *Mit*

$$a_\nu \supseteq b_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gilt

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \supseteq \prod_{\nu=1}^{n} b_\nu.$$

Satz 2.4. *Für $n \geqq k$ gilt*

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu \supseteq \prod_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa.$$

Erklärung 4. Daß

$$a \supseteq b, \quad a \neq b$$

stattfindet, werde auch durch

$$a \supset b$$

zum Ausdruck gebracht. Mit $a \supset b$ sei $b \subset a$ gleichbedeutend. Für

$$a \supset b, \; b \supset c \quad \text{bzw.} \quad a \subset b, \; b \subset c$$

werde kürzer

$$a \supset b \supset c \quad \text{bzw.} \quad a \subset b \subset c$$

geschrieben.

Satz 3. *Mit*

$$a \supset b, \; b \supset c \quad \textit{bzw.} \quad a \supseteq b, \; b \supset c$$

gilt $a \supset c$.

Erklärung 5. Es seien a, b Elemente aus M derart, daß $a \supset b$ gilt. Gibt es in M kein Element x derart, daß

$$a \supset x \supset b$$

gilt, so heiße a ein *oberer Nachbar* von b und umgekehrt b ein *unterer Nachbar* von a.

Satz 4. *Ist M ein endliches Holoid und sind a, b Elemente aus M derart, daß $a \supset b$ gilt, so hat a mindestens einen unteren Nachbarn und b mindestens einen oberen Nachbarn.*

Erklärung 6. Ein von e verschiedenes Element a aus M, das nur e und a als Unterelemente hat, heiße ein *Primelement* von M.

Ohne weiteres erkennt man, daß jedes Primelement ein oberer Nachbar von e ist und umgekehrt.

Erklärung 7. Ein Element a aus M derart, daß

$$a \bigcirc a = a$$

gilt, heiße *idempotent*.

Ersichtlich sind die untere und obere Spitze von M idempotente Elemente. Demnach besitzt jedes Holoid mindestens ein idempotentes Element und jedes *endliche* Holoid, das aus mehr als einem Element besteht, mindestens zwei idempotente Elemente.

Man kann die endlichen Holoide folgendermaßen veranschaulichen. Wir deuten die Elemente eines derartigen Operationsbereiches als Punkte der Ebene oder des Raumes. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall der Ebene. Dann und nur dann, wenn zwei Elemente des Holoids Nachbarn sind, seien die entsprechenden Bildpunkte durch eine Strecke verbunden. Die Strecke kann eine beliebige Richtung haben; sie soll nur nicht waagerecht verlaufen. Dabei sei die Anordnung der Bildpunkte derart, daß der Bildpunkt von a oberhalb des Bildpunktes von b liegt, wenn a ein oberer Nachbar von b ist. Das Bild eines Holoids erster Ordnung ist ein einzelner Punkt; einem Holoid zweiter Ordnung entspricht eine Strecke und einem Holoid dritter Ordnung ein Streckenzug, wie er in Fig. 1 dargestellt ist. Topologisch gesehen gibt es also nur je einen Typus von Holoiden der ersten, zweiten und dritten Ordnung. Dagegen verteilen sich die Holoide höherer Ordnung jeweils auf verschiedene Typen. So gibt es zwei Typen von Holoiden vierter Ordnung, fünf Typen von Holoiden fünfter Ordnung und 15 Typen von Holoiden sechster Ordnung[4]).

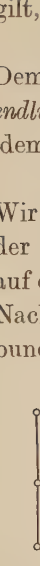


Fig. 1.

[4]) Die Typen von der ersten bis zur sechsten Ordnung sind bekannt; die Bilder derselben stimmen, wie man sich leicht überzeugt, mit den in [Verb. 2], S. 613 angegebenen Streckenkomplexen überein. ([Verb. 2] = Grundzüge der Theorie der Verbände. Math. Annalen **111** (1935), S. 596—621).

Die Aufgabe, die verschiedenen Holoidtypen festzustellen, läuft auf das topologische Problem hinaus, alle Streckenkomplexe anzugeben, die den folgenden Bedingungen genügen:

α) Jeder Komplex enthält genau einen untersten und genau einen obersten Punkt.

β) Kein Komplex enthält einen dreieckigen Teilkomplex vom Typus der Fig. 2.

Fig. 2.

Die Bedingung α) bedarf keiner Erläuterung. Die Bedingung β) soll verhindern, daß zwei Punkte des Komplexes — z. B. a und c in Fig. 2 — zugleich benachbart und nicht benachbart sind.

§ 2.

Das lineare Holoid.

Um weiter zu kommen, muß man aus der zunächst unübersehbaren Masse der Holoide gewisse Klassen herausgreifen, die sich durch besondere Eigenschaften auszeichnen. Von welchen Gesichtspunkten man sich bei der Auswahl leiten läßt, d. h. welches Ausleseprinzip man dabei benutzt, hängt davon ab, in welcher Richtung man die Theorie ausbauen will. Hier interessieren uns diejenigen Holoide, die dem folgenden *Axiom* genügen:

A VI. Sind a, b zwei verschiedene Elemente aus M, so gibt es in M entweder ein Element x derart, daß gilt

$$a = b \circ x,$$

oder ein Element y derart, daß gilt

$$b = a \circ y.$$

Für zwei beliebige Elemente a, b eines derartigen Holoids findet also

$$a \supset b \quad \text{oder} \quad a \subseteq b$$

statt, wobei auch beide Relationen zugleich bestehen können. Das Axiom A VI erhebt somit die Beziehung $\supset$ zu einer linearen Ordnungsbeziehung. Dieser Umstand rechtfertigt die folgende Namensgebung.

Erklärung 8. Ein dem Axiom A VI genügendes Holoid heiße *linear*.

Das Bild eines linearen Holoids ist ein einfacher offener Streckenzug (vgl. Fig. 1), woraus sofort ersichtlich ist, daß jedes Element eines linearen Holoids höchstens einen oberen und höchstens einen unteren Nachbarn hat. Damit hängt zusammen, daß jedes lineare und endliche Holoid ein einziges Primelement besitzt, wenn man von dem trivialen Fall absieht, daß überhaupt nur ein Element vorhanden ist. Es gibt lineare Holoide jeder Ordnung;

insbesondere sind alle Holoide von der ersten bis zur dritten Ordnung linear. Erst von der vierten Ordnung an gehören zu jeder Ordnung sowohl lineare als auch nichtlineare Typen.

Weiterhin sei M ein lineares Holoid. Für manche Betrachtungen empfiehlt es sich, den Linearcharakter von M dadurch zum Ausdruck zu bringen, daß man die Elemente von M mit

$$p^{[0]},\ p^{[1]},\ p^{[2]},\ \ldots$$

bezeichnet derart, daß

$$p^{[0]} = e$$

gilt und jedes $p^{[\alpha+1]}$ der obere Nachbar von $p^{[\alpha]}$ ist. Bei dieser Bezeichnungsweise findet

$$p^{[0]} \subset p^{[1]} \subset p^{[2]} \subset \cdots$$

statt. Für $p^{[1]}$ werde auch p geschrieben. Den Anschluß an die alte Bezeichnung der Elemente — kleine lateinische Buchstaben — denken wir uns durch

$$p^{[\alpha]} = a,\quad p^{[\beta]} = b,\ \ldots$$

vermittelt. Mit

$$a \supseteq b \quad \text{bzw.} \quad a \supset b$$

gilt dann

$$\alpha \geqq \beta \quad \text{bzw.} \quad \alpha > \beta$$

und umgekehrt.

Zwischen den Elementen $p^{[\alpha]}$ und p^{α} ist scharf zu unterscheiden; $p^{[\alpha]}$ kann ein ganz beliebiges Element von M bedeuten, während unter p^{α} die α-te Potenz des Primelementes p zu verstehen ist. Zwar ist

$$p^{[0]} = p^0 = e,\quad p^{[1]} = p^1 = p;$$

dagegen gilt für $\alpha \geqq 2$ im allgemeinen nicht

$$p^{[\alpha]} = p^{\alpha}.$$

Auf das zwischen $p^{[\alpha]}$ und p^{α} bestehende Abhängigkeitsverhältnis kommen wir noch ausführlich zu sprechen.

Satz 5. *Mit*

$$a \cap c \supset b \cap c$$

gilt

$$a \supset b.$$

Beweis. Wäre die Behauptung falsch, so müßte

$$a \subseteq b$$

und somit nach Satz 2. 3

$$a \cap c \subseteq b \cap c$$

sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Anmerkung. Der Satz 5 gilt nicht mehr für nichtlineare Holoide, wie das Holoid der Fig. 3 zeigt.

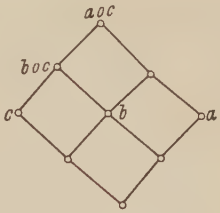


Fig. 3.

Satz 6. *Mit*

(3) $$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} \subseteq p^{[\gamma]}$$

gilt

(4) $$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta+1]} \subseteq p^{[\gamma+1]}$$

vorausgesetzt, daß $p^{[\gamma+1]}$ *existiert.*

Beweis. Nach (3) ist

$$p^{[\alpha]} \subset p^{[\gamma+1]}.$$

Gemäß Erklärung 3 gibt es mindestens ein ξ derart, daß

(5) $$p^{[\alpha]} \circ p^{[\xi]} = p^{[\gamma+1]}$$

gilt. Wegen (3) ist

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\xi]} \supset p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]},$$

so daß nach Satz 5

(6) $$\xi > \beta$$

ist.

Mit $p^{[\gamma+1]}$ existiert auch $p^{[\beta+1]}$ und somit auch $p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta+1]}$. Wäre nun (4) falsch, so müßte

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta+1]} \supset p^{[\gamma+1]}$$

und wegen (5)

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta+1]} \supset p^{[\alpha]} \circ p^{[\xi]}$$

sein, so daß — wieder nach Satz 5 —

$$\beta + 1 > \xi$$

wäre, was im Widerspruch mit (6) steht. Infolgedessen ist (4) richtig.

Satz 7. 1. *Für zwei beliebige Elemente* $p^{[\alpha]}$ *und* $p^{[\beta]}$ *gilt*

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} \subseteq p^{[\alpha+\beta]}$$

vorausgesetzt, daß $p^{[\alpha+\beta]}$ *existiert.*

Beweis. Es ist

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[0]} = p^{[\alpha]}$$

und somit nach Satz 6

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[1]} \subseteq p^{[\alpha+1]},$$
$$p^{[\alpha]} \circ p^{[2]} \subset p^{[\alpha+2]},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} \subseteq p^{[\alpha+\beta]}.$$

Satz 7.2. *Sind*

$$p^{[\alpha]}, \quad p^{[\beta]}, \quad p^{[\gamma]}$$

Elemente aus M derart, daß

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} = p^{[\gamma]}$$

ist, so gilt

$$\alpha + \beta \geqq \gamma \geqq \max(\alpha, \beta).$$

Beweis. Die Abschätzung nach oben ist in Satz 7.1 bewiesen; die Abschätzung nach unten ist trivial.

Satz 7.3. *Existiert* $p^{[\alpha]}$, *so gilt*

$$p^{\alpha} \subseteq p^{[\alpha]}. \tag{7}$$

Beweis. Die Relation (7) trifft für $\alpha = 0$ und für $\alpha = 1$ zu. Ist (7) für irgendein α richtig, so folgt

$$p^{\alpha+1} \subseteq p^{[\alpha]} \circ p.$$

Existiert $p^{[\alpha+1]}$, so ist nach Satz 7.1

$$p^{[\alpha]} \circ p \subseteq p^{[\alpha+1]},$$

so daß auch

$$p^{\alpha+1} \subseteq p^{[\alpha+1]}$$

richtig ist.

Eine Bemerkung. Dem linearen Holoid M kann man eine zahlentheoretische Funktion $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ dadurch zuordnen, daß man, wenn

$$a \circ b = c, \quad \text{d. h. } p^{[\alpha]} \circ p^{[\beta]} = p^{[\gamma]}$$

stattfindet,

$$\mathfrak{f}(\alpha, \beta) = \gamma$$

setzt. Über diese Funktion ist folgendes zu sagen. Nach A I existiert, wenn M *unendlich* ist, $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ für *jedes* Paar von nichtnegativen ganzen Zahlen α, β; ist M dagegen *endlich*, so darf man für α, β nur zwei beliebige Zahlen aus der Reihe

$$0, 1, \ldots, \mu$$

nehmen, wobei $p^{[\mu]}$ das oberste Element von M ist. Weiter bedingt A III, daß $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ symmetrisch in den Argumenten ist. Nach A IV gilt ferner

$$\mathfrak{f}(\alpha, 0) = \alpha,$$

und A V stellt fest, daß aus

$$\alpha = \mathfrak{f}(\beta, \xi), \quad \beta = \mathfrak{f}(\alpha, \eta)$$

die Identität von α und β folgt. Schließlich findet nach Satz 7.2

$$\alpha + \beta \geqq \mathfrak{f}(\alpha, \beta) \geqq \max(\alpha, \beta) \tag{8}$$

statt. Einer bestimmten Realisierung der Verknüpfung $\circ$ entspricht eine bestimmte Realisierung der Funktion $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ und umgekehrt. Somit ist die

Aufgabe, alle Verknüpfungen $\bigcirc$ festzustellen, die dem System der Axiome A I bis A VI genügen, äquivalent mit der Aufgabe, alle Funktionen $\mathfrak{f}(\alpha, \beta)$ festzustellen, die die erwähnten (und noch weitere) Eigenschaften besitzen. Der durch die Relation (8) ausgedrückten Eigenschaft kommt insofern eine besondere Bedeutung zu, als die darin auftretenden Funktionen, nämlich die Majorante $\alpha + \beta$ und die Minorante $\max(\alpha, \beta)$, zwei Funktionen sind, die für $\mathfrak{f}(\alpha,\beta)$ genommen werden können. Das läßt sich leicht verifizieren. Im ersten Fall ist M eine *Semigruppe* in bezug auf die Verknüpfung $\bigcirc$, im zweiten Fall ein *Halbverband* in bezug auf $\bigcirc$.

§ 3.

Bestimmung von $x \bigcirc y$.

Wir beginnen mit einem einfachen Hilfssatz.

Satz 8. *Mit*

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} = p^{[\eta]}$$

gilt

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta+1]} = p^{[\eta+1]}$$

vorausgesetzt, daß $p^{[\eta+1]}$ *existiert.*

Beweis. Nach Satz 6 ist

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta+1]} \subseteq p^{[\eta+1]};$$

trivial ist

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta+1]} \supseteq p^{[\eta+1]}.$$

Aus den beiden Relationen folgt nach Satz 1. 2 die Behauptung.

Nun läßt sich leicht der erste *Hauptsatz* beweisen:

Satz 9. *Mit*

$$p^{[\xi]} \supseteq p^{[\varrho]} \supseteq p^{[\eta]},$$

wobei $p^{[\varrho]}$ *ein idempotentes Element ist, gilt*

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} = p^{[\xi]}.$$

Beweis. Wegen

$$p^{[\varrho]} \bigcirc p^{[\varrho]} = p^{[\varrho]}$$

findet nach Satz 8

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\varrho]} = p^{[\xi]}$$

statt. In Verbindung mit

$$p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\varrho]} \supseteq p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} \supseteq p^{[\xi]}$$

ergibt sich

$$p^{[\xi]} \supseteq p^{[\xi]} \bigcirc p^{[\eta]} \supseteq p^{[\xi]},$$

woraus die Behauptung nach Satz 1. 2 folgt.

Die Bedeutung des Satzes 9 beruht darauf, daß vermöge desselben der Wert des Produktes $x \circ y$ für den Fall bestimmt wird, daß sich zwischen x und y mindestens ein idempotentes Element befindet. Der zweite Hauptsatz (Satz 12), dem wir uns nun zuwenden, liefert den Wert des Produktes für den Fall, daß sich zwischen den beiden Faktoren kein idempotentes Element befindet. Zunächst einige Hilfssätze.

Satz 10. 1. *Es seien* $p^{[\varrho]}$ *und* $p^{[\sigma]}$ *zwei idempotente Elemente, zwischen denen sich kein weiteres idempotentes Element befindet; es sei* $\varrho < \sigma$. *Ist dann* ξ *eine ganze Zahl derart, daß*

(9) $$\varrho \leqq \xi < \sigma$$

stattfindet, so gilt

(10) $$p^{[\xi]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\xi+1]}.$$

Beweis. Wir wenden das Verfahren der vollständigen Induktion an. Nach Satz 9 gilt

$$p^{[\varrho]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\varrho+1]},$$

so daß die Behauptung des Satzes für $\xi = \varrho$ zutrifft. Es sei nun α eine feste Zahl mit

(11) $$\varrho \leqq \alpha < \sigma,$$

und (10) möge für

$$\xi = \varrho, \varrho + 1, \ldots, \alpha$$

richtig sein. Dann ist zu zeigen, daß bei der über (11) hinausgehenden Bedingung

(12) $$\alpha + 1 < \sigma$$

die Relation (10) auch für $\xi = \alpha + 1$ zutrifft, d. h. daß

(13) $$p^{[\alpha+1]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+2]}$$

gilt.

Wir führen den Nachweis indirekt. Wäre (13) falsch, so müßte wegen

$$p^{[\alpha]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]}$$

und Satz 6

(14) $$p^{[\alpha+1]} \circ p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]}$$

sein. Folgendermaßen läßt sich aus (14) ein Widerspruch herausarbeiten.

Zunächst ersieht man aus (14), daß

$$\alpha + 1 \neq \varrho + 1$$

ist, denn andernfalls wäre $p^{[\alpha+1]}$ ein idempotentes Element, was wegen (12) ausgeschlossen ist. Da wegen (14) aber auch

$$\alpha + 1 \geqq \varrho + 1$$

sein muß, findet

(15) $$\alpha \geqq \varrho + 1$$

statt. Wir multiplizieren nun (14) mit $p^{[\varrho+1]}$, wodurch sich

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]},$$

also nach (14)

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]}$$

ergibt. Wegen (15) dürfen wir das Produkt

$$p^{[\varrho+1]} \bigcirc p^{[\varrho+1]}$$

gemäß (10) ausrechnen, wodurch wir

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+2]} = p^{[\alpha+1]} \tag{16}$$

erhalten.

Aus (16) ersieht man, daß

$$\alpha + 1 \neq \varrho + 2$$

ist, denn andernfalls wäre $p^{[\alpha+1]}$ ein idempotentes Element, was, wie bereits bemerkt, ausgeschlossen ist. Da wegen (16) aber auch

$$\alpha + 1 \geqq \varrho + 2$$

sein muß, findet

$$\alpha \geqq \varrho + 2 \tag{17}$$

statt. Wir verfahren nun mit (16) wie soeben mit (14), d. h. wir multiplizieren (16) mit $p^{[\varrho+1]}$, wodurch sich wegen (14)

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+2]} \bigcirc p^{[\varrho+1]} = p^{[\alpha+1]}$$

ergibt. Wegen (17) dürfen wir das Produkt

$$p^{[\varrho+2]} \bigcirc p^{[\varrho+1]}$$

gemäß (10) ausrechnen, wodurch wir

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+3]} = p^{[\alpha+1]} \tag{18}$$

erhalten.

In dieser Weise fahren wir fort. Hat man etwa die Relation

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+h]} = p^{[\alpha+1]}$$

erreicht, so folgt

$$\alpha \geqq \varrho + h$$

und daraus weiter

$$p^{[\alpha+1]} \bigcirc p^{[\varrho+h+1]} = p^{[\alpha+1]}.$$

Das Verfahren kann also beliebig weit fortgesetzt werden und führt somit auf den Widerspruch, daß α größer als eine beliebig vorgegebene Zahl sein muß. Die Quelle des Widerspruchs ist (14). Diese Relation muß infolgedessen falsch und demnach (13) richtig sein. Damit ist der Satz in vollem Umfang bewiesen.

Der nächste Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes 10. 1.

Satz 10. 2. *Es seien* $p^{[\varrho]}$ *und* $p^{[\sigma]}$ *zwei idempotente Elemente, zwischen denen sich kein weiteres idempotentes Element befindet; es sei* $\varrho < \sigma$. *Sind dann* ξ, η *zwei ganze Zahlen derart, daß*

$$\varrho \leqq \xi \leqq \sigma, \quad \varrho \leqq \eta \leqq \sigma, \quad \xi + \eta \leqq \varrho + \sigma \tag{19}$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\xi+\eta-\varrho]}. \tag{20}$$

Beweis. Unbeschadet der Allgemeinheit darf $\xi \geqq \eta$ angenommen werden. Es werde

$$\xi + \eta = \zeta$$

gesetzt. Wegen (19) gilt

$$2\,\varrho \leqq \zeta \leqq \varrho + \sigma.$$

Da $p^{[\varrho]}$ idempotent ist, findet

$$p^{[\varrho]} \circ p^{[\varrho]} = p^{[\varrho]}$$

statt, so daß (20) für

$$\xi = \varrho, \ \eta = \varrho, \quad \text{d. h. } \zeta = 2\,\varrho$$

zutrifft. Es sei nun α eine feste Zahl mit

$$2\,\varrho \leqq \alpha \leqq \varrho + \sigma, \tag{21}$$

und (20) möge für

$$\zeta = 2\,\varrho,\ 2\,\varrho + 1,\ \ldots,\ \alpha$$

richtig sein. Dann ist zu zeigen, daß bei der über (21) hinausgehenden Bedingung

$$\alpha + 1 \leqq \varrho + \sigma \tag{22}$$

die Relation (20) auch für $\zeta = \alpha + 1$ zutrifft, d. h. daß

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\alpha+1-\varrho]} \tag{23}$$

gilt.

Der Nachweis verläuft folgendermaßen. Wegen

$$\xi + \eta = \alpha + 1 \tag{24}$$

kann nicht zugleich

$$\xi = 0, \quad \eta = 0$$

sein. Da wir $\xi \geqq \eta$ angenommen haben, ist infolgedessen $\xi > 0$ und somit $\xi - 1 \geqq 0$. Wegen (24) ist

$$(\xi - 1) + \eta = \alpha, \tag{25}$$

wobei nach dem eben Bemerkten kein Summand negativ ist. Die Zerlegung (25) liefert gemäß (20)

$$p^{[\xi-1]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\alpha-\varrho]}.$$

Wir multiplizieren mit $p^{[\varrho+1]}$, wodurch sich

$$p^{[\xi-1]} \circ p^{[\varrho+1]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\alpha-\varrho]} \circ p^{[\varrho+1]} \tag{26}$$

ergibt. Nun ist nach (24)

$$\xi - 1 = \alpha - \eta \leqq \alpha - \varrho$$

und nach (22)

$$\alpha - \varrho \leqq \sigma - 1,$$

so daß

$$\xi - 1 < \sigma$$

ist; das Produkt

$$p^{[\xi-1]} \circ p^{[\varrho+1]}$$

darf also nach Satz 10. 1 ausgerechnet werden. Da ferner nach (22)

$$\alpha - \varrho < \sigma$$

ist, darf auch das Produkt

$$p^{[\alpha-\varrho]} \circ p^{[\varrho+1]}$$

nach Satz 10. 1 ausgerechnet werden. Dadurch geht aber (26) in die behauptete Relation (23) über.

Der folgende Satz läßt sich ohne das Schlußverfahren der vollständigen Induktion beweisen. Übrigens ist der Beweis nicht so subtil wie die vorhergehenden.

Satz 11. *Es seien $p^{[\varrho]}$ und $p^{[\sigma]}$ zwei idempotente Elemente, zwischen denen sich kein weiteres idempotentes Element befindet; es sei $\varrho < \sigma$. Sind dann ξ, η zwei ganze Zahlen derart, daß*

$$\varrho \leqq \xi \leqq \sigma, \quad \varrho \leqq \eta \leqq \sigma, \quad \xi + \eta \geqq \varrho + \sigma \tag{27}$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\sigma]}. \tag{28}$$

Beweis. Wegen (27) lassen sich — im allgemeinen sogar auf verschiedene Weisen — zwei ganze Zahlen ξ' und η' so wählen, daß

$$\varrho \leqq \xi' \leqq \xi, \quad \varrho \leqq \eta' \leqq \eta, \quad \xi' + \eta' = \varrho + \sigma \tag{29}$$

ist. Auf die Zahlen ξ' und η' darf aber der Satz 10. 2 angewendet werden, der

$$p^{[\xi']} \circ p^{[\eta']} = p^{[\sigma]}$$

liefert. Wegen (29) folgt weiter

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} \supseteq p^{[\sigma]}. \tag{30}$$

Durch Multiplikation der beiden aus (27) fließenden Relationen

$$p^{[\xi]} \subseteq p^{[\sigma]}, \quad p^{[\eta]} \subseteq p^{[\sigma]}$$

ergibt sich andererseits

(31) $$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} \subseteq p^{[\sigma]}.$$

Aus (30) und (31) folgt nach Satz 1. 2 die Behauptung.

Die Sätze 10. 2 und 11 lassen sich ohne weiteres zusammenfassen; wir erhalten so den zweiten *Hauptsatz*:

Satz 12. *Es seien $p^{[\varrho]}$ und $p^{[\sigma]}$ zwei idempotente Elemente, zwischen denen sich kein weiteres idempotentes Element befindet; es sei $\varrho < \sigma$. Sind dann ξ, η zwei ganze Zahlen derart, daß*

$$\varrho \leqq \xi \leqq \sigma, \quad \varrho \leqq \eta \leqq \sigma$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\min(\xi+\eta-\varrho,\ \sigma)]}.$$

Die vorhergehenden Ausführungen bedürfen noch einer Ergänzung. Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß jedes *endliche* Holoid ein oberstes Element besitzt und daß dasselbe idempotent ist. Demgegenüber kann für ein *unendliches* Holoid der Fall eintreten, daß ein idempotentes Element $p^{[\varrho]}$ vorhanden ist derart, daß sich oberhalb von $p^{[\varrho]}$ kein weiteres idempotentes Element befindet. Dabei liegen oberhalb von $p^{[\varrho]}$ selbstverständlich noch beliebig viele Elemente des Holoids. Das zur Vorbereitung für den folgenden Satz.

Satz 13. *Es sei M ein unendliches lineares Holoid. M enthalte nur endlich viele idempotente Elemente. Es sei $p^{[\varrho]}$ das oberste idempotente Element von M. Sind dann ξ, η zwei ganze Zahlen derart, daß*

$$\varrho \leqq \xi, \quad \varrho \leqq \eta$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\xi+\eta-\varrho]}.$$

Dieser Satz wird ähnlich wie die Sätze 10. 1 und 10. 2 bewiesen. Wir überlassen die Durchführung dem Leser.

Vermöge der Sätze 9, 12 und 13 läßt sich die Feinstruktur der linearen Holoide weitgehend übersehen. Insbesondere erkennt man, daß die idempotenten Elemente das Rückgrat der Holoide bilden. In der folgenden Erklärung legen wir diese zunächst nur bildlich genommene Bezeichnung offiziell fest.

Erklärung 9. Unter dem *Rückgrat* eines Holoids werde die Menge der idempotenten Elemente des Holoids verstanden.

Es sei N das Rückgrat des linearen Holoids M. Zu den Elementen von N gehört stets die untere Spitze von M. Besitzt M eine obere Spitze, so gehört auch diese zu den Elementen von N.

Wir wollen die Hauptergebnisse der Arbeit noch einmal zusammenstellen:

I. Ist $p^{[\varrho]}$ ein Element aus N und sind $p^{[\xi]}$, $p^{[\eta]}$ zwei Elemente aus M derart, daß

$$\xi \geqq \varrho \geqq \eta \quad \text{oder} \quad \xi \leqq \varrho \leqq \eta$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\max(\xi, \eta)]}.$$

II. Sind $p^{[\varrho]}$ und $p^{[\sigma]}$, wobei $\varrho < \sigma$ sei, zwei Elemente aus N, zwischen denen sich kein weiteres Element aus N befindet, und sind $p^{[\xi]}$, $p^{[\eta]}$ zwei Elemente aus M derart, daß

$$\varrho \leqq \xi \leqq \sigma, \quad \varrho \leqq \eta \leqq \sigma$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\min(\xi+\eta-\varrho,\ \sigma)]}.$$

III. (Nur für den Fall, daß M unendlich, N dagegen endlich ist.) Ist $p^{[\varrho]}$ das oberste Element von N und sind $p^{[\xi]}$, $p^{[\eta]}$ zwei Elemente aus M derart, daß

$$\varrho \leqq \xi, \quad \varrho \leqq \eta$$

stattfindet, so gilt

$$p^{[\xi]} \circ p^{[\eta]} = p^{[\xi+\eta-\varrho]}.$$

Zum Schluß noch zwei Bemerkungen. Erstens: Welche Elemente das Rückgrat von M bilden, wird durch das System der Axiome A I bis A VI in keiner Weise festgelegt. Oder anders ausgedrückt: Das genannte Axiomensystem ist insofern unvollständig, als es, wenn es ein bestimmtes Holoid definieren soll, durch genaue Festsetzungen hinsichtlich der *Anzahl* der idempotenten Elemente und *Einbettung* derselben in M ergänzt werden muß, wobei zu beachten ist, daß ganz beliebige Elemente von M zu idempotenten Elementen erhoben werden können. Oder noch anders: Zwei lineare Holoide sind dann und nur dann *isomorph*, wenn sie von derselben Ordnung sind, gleichviel idempotente Elemente besitzen und wenn die Verteilung der letzteren bei beiden Holoiden dieselbe ist. Das Gesicht eines Holoids, d. h. seine Individualität, wird also in letzter Instanz von den idempotenten Elementen geprägt.

Zweitens: In § 1 wurde darauf hingewiesen, daß jedem Holoid eine gewisse quadratische Tafel zugeordnet werden kann. Handelt es sich dabei um ein lineares Holoid, so empfiehlt es sich, bei der Konstruktion der Tafel einige Abänderungen vorzunehmen. So beginne man die Numerierung nicht mit 1, sondern mit 0; die Elemente von M seien also

$$a_0, \ldots, a_m,$$

wobei

$$a_\mu = p^{[\mu]} \qquad (\mu = 0, \ldots, m)$$

sei. Sodann schreibe man in die Felder der Tafel nicht die Elemente selbst, sondern nur deren Indizes. Beispielsweise gehört zu dem aus den sechs Elementen

$$p^{[0]}, \ldots, p^{[5]}$$

bestehenden linearen Holoid, dessen idempotente Elemente

$$p^{[0]},\ p^{[2]},\ p^{[5]}$$

sind, die folgende Tafel:

	0	1	2	3	4	5	
0	0	1	2	3	4	5	0
1	1	2	2	3	4	5	1
2	2	2	2	3	4	5	2
3	3	3	3	4	5	5	3
4	4	4	4	5	5	5	4
5	5	5	5	5	5	5	5
	0	1	2	3	4	5	

Fig. 4.

Fig. 4 stellt das Bild dieses Holoids dar; die besonders gekennzeichneten Punkte entsprechen den idempotenten Elementen.

(Eingegangen am 31. Juli 1942.)

Die Kettenregel für höhere Ableitungen.

Von

U. T. Bödewadt in Göttingen.

Wenn in einer Funktion die unabhängige Veränderliche ihrerseits doch wiederum von einer anderen Veränderlichen abhängt:

$$y = F(x); \quad x = \varphi(t); \quad y = F(\varphi(t)) = f(t), \tag{1}$$

so ist damit eine unmittelbare oder zusammengesetzte Funktion dieser letzten Veränderlichen gegeben. Ihre Ableitung — hier und im folgenden soll vorausgesetzt sein, daß alle auftretenden Ableitungen vorhanden und stetig sind — setzt sich aus den Ableitungen der beiden einfachen Funktionen nach der Regel $f'(t) = F'(x) \cdot \varphi'(t)$ zusammen, wobei man rechter Hand für x wieder den Wert $x = \varphi(t)$ zu nehmen hat. Verwendet man zur Bezeichnung der Ableitung einer Funktion nach ihrem unmittelbaren Argument das Zeichen D, so lautet die Regel:

$$Df = DF \cdot D\varphi. \tag{2}$$

Die Ausdehnung dieser Regel auf eine mehrfach zusammengesetzte Funktion

$$z_0 \equiv t; \quad z_\nu = F_\nu(z_{\nu-1}) \quad \cdot \quad [\nu = 1, 2, \ldots N-1]; \tag{3}$$

$$y = F_N(z_{N-1}) = \Big(F_N\big(F_{N-1}(\ldots F_2(F_1(t))\ldots)\big)\Big) = f(t),$$

eine sogenannte Funktionskette, erfordert nur mehrfache Anwendung von (2) und gibt die bekannte Kettenregel

$$Df = DF_1 \cdot DF_2 \cdot \ldots \cdot DF_N. \tag{4}$$

Da man von einer richtigen Kette eigentlich nur sprechen kann, wenn sie außer dem Anfangs- und dem Endglied noch wenigstens ein Zwischenglied enthält, so müßte der Name „Kettenregel“ eigentlich den Fällen $n \geqq 3$ vorbehalten bleiben. Er wird freilich auch oft für (2) gebraucht, und nicht ohne Recht: Es bedarf kaum einer Überlegung, wie die Regel (2) für den Fall (3) zu verallgemeinern sei, die Antwort (4) bietet sich sozusagen von selbst dar.

Mit den höheren Ableitungen verhält es sich hingegen anders: Hier scheint die Kettenregel bislang noch nicht angegeben worden zu sein. Der Grund dafür liegt vermutlich im Mangel an geeigneten Bezeichnungen, die sich leicht bei mehreren Funktionen gleichzeitig anwenden lassen und offene Zahlen-

faktoren in den Formeln vermeiden. Mit der in dieser Mitteilung vorgeschlagenen Bezeichnung durch Operatoren höheren Grades ist nun die Aufstellung der Kettenregel (im oben erläuterten Sinne: für mehrfach zusammengesetzte Funktionen) in übersichtlicher Form möglich. — Um des Zusammenhanges willen möge es gestattet sein, auch Bekanntes zu wiederholen[1]). Dafür sind die Beweise nur in ihren Leitgedanken angegeben worden; es wird an Hand dieser Andeutungen keine besonderen Schwierigkeiten bereiten, das Fehlende zu ergänzen. Solche Kürze ist wohl um so eher erlaubt, als durch die Arbeiten von Amaldi[2]) und Mambriani[3]) alle Wünsche nach ausführlicher und gründlicher Behandlung der höheren Ableitungen einfach zusammengesetzter Funktionen auch von mehreren Veränderlichen als erfüllt gelten können. — Inhaltlich neu sind im folgenden die Formeln: (10) (für $n > 1$) und (11); vielleicht (12) bis (14), (17) bis (20), (21); ferner (26) (für $n > 1$), (34), (38) (für $n > 1$), (39), (41) und (44).

1.

Auch die höheren Ableitungen einer zusammengesetzten Funktion (1) lassen sich durch wiederholte Anwendung der Regel (2) bilden. Dabei zeigt sich, daß die k-te Ableitung der Funktion $f(t)$ für die ersten Werte von k die Gestalt

$$D^k f = \sum_{n=1}^{k} D^n F \cdot D_{kn}\varphi \tag{5}$$

hat. Bildet man hier beiderseits die Ableitung, so sieht man, daß diese Form für alle k gültig bleibt, wenn man für die Ausdrücke $D_{kn}\varphi$ die Rekursionsformel

$$D_{kn}\varphi = D(D_{k-1,n}\varphi) + D\varphi \cdot D_{k-1,n-1}\varphi \quad [k > n > 1] \tag{6}$$

mit den Ausgangswerten

$$D_{k0}\varphi = 0 \ [k > 0]; \ D_{k1}\varphi = D^k\varphi \ [k \geqq 0]; \ D_{kk}\varphi = (D\varphi)^k \ [k \geqq 0] \tag{7}$$

ansetzt. Ohne das erste Glied auf der rechten Seite gilt die Formel (6) noch für $k = n$, bei Fortlassen des zweiten Gliedes für $n = 1$. — D_{kn} ist also ein Differentialoperator von der Ordnung k (in bezug auf die unabhängige Veränderliche) und vom Grade n (in der abhängigen Veränderlichen); linear ist

[1]) Vgl. die am Schlusse aufgeführte Literatur, besonders die zusammenfassenden Darstellungen in [2], [3], [7].

[2]) L [4].

[3]) L [7]. — Von den Abhandlungen Amaldis und Mambrianis erhielt Verfasser erst nach Abschluß der vorliegenden Untersuchungen Kenntnis.

nur D_{k1}. Zur unmittelbaren Berechnung der D_{kn} dient die Formel von Faà di Bruno

$$D_{kn}\varphi(t) = \sum_{(\lambda)} k! \prod_{\nu=1}^{1+k-n} \frac{1}{\lambda_\nu!}\left(\frac{D^\nu \varphi(t)}{\nu!}\right)^{\lambda_\nu}; \tag{8}$$

die Summe ist zu erstrecken über alle Zusammenstellungen $(\lambda) = (\lambda_1, \ldots \lambda_\nu, \ldots)$ nichtnegativer ganzer Zahlen $\lambda_\nu \geqq 0$, welche die beiden Bedingungen

$$\Sigma \lambda_\nu = n; \quad \Sigma \nu \cdot \lambda_\nu = k \tag{9}$$

erfüllen. Der Beweis für diese Formel ergibt sich am schnellsten mit Hilfe der Polynomialformel, indem man in

$$f(t+\tau) = F(\varphi(t+\tau))$$

F und φ (also auch f) als in ihre Taylorreihen entwickelbar annimmt — diese Annahme ist erlaubt, da die algebraische Gestalt der Formel von den besonderen Eigenschaften von F und φ nicht abhängt — und die Koeffizienten von $\frac{\tau^n}{n!}$ vergleicht.

Von den beiden Zeigern k, n des Operators D_{kn} wurde der Ordnungszeiger an die erste Stelle gesetzt, da er in der Formel (5) offensichtlich die Hauptrolle spielt, während der Gradzeiger n zur weiteren Unterscheidung zwischen den zusammen auftretenden Operatoren gleicher Ordnung dient. Das hat allerdings zur Folge, daß man in der Kettenregel (11) die Teilfunktionen der Kette (3) in der angegebenen Weise zu beziffern hat, d. h.: nicht in der Reihenfolge, die sich beim Schreiben einstellt, wenn man $f(t)$ mittels der F_ν anschreibt, sondern in der Reihenfolge, in der man die Teilfunktionen F_ν braucht, wenn man zu gegebenem t den Funktionswert $f(t)$ berechnet.

Bevor man die Kettenregel hinschreiben kann, muß die Formel (5) auf die Operatoren höheren Grades ausgedehnt werden:

$$D_{kn} f = \sum_{\lambda=n}^{k} D_{k\lambda}\varphi \cdot D_{\lambda n} F. \tag{10}$$

Diese Gleichung ist für $n = 1$ mit (5) identisch, für $n = k$ mit der k-ten Potenz von (2); für $k > n > 1$ läßt sie sich leicht mittels (6) durch Induktion nach k beweisen. Die Operatoren D_{kn} beziehen sich (ebenso wie D) stets auf das unmittelbare Argument der dabeistehenden Funktion, in (10) also bei f und φ auf t, bei F auf $x = \varphi(t)$. — Von (10) zur Kettenregel (11) ist jetzt nur noch ein ähnlich kleiner Schritt, wie oben von (2) nach (4):

$$D_{kn} f = \sum_{(\lambda)} D_{\lambda_0 \lambda_1} F_1(z_0) \cdot D_{\lambda_1 \lambda_2} F_2(z_1) \cdot \ldots \cdot D_{\lambda_{N-1} \lambda_N} F_N(z_{N-1}) \tag{11}$$
$$[k = \lambda_0 \geqq \lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_N = n];$$

die Summe ist über alle $\frac{(N-1+k-n)!}{(N-1)!\,(k-n)!}$ Zusammenstellungen $(\lambda) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ aus nichtnegativen ganzen λ_ν zu erstrecken, welche den angegebenen

Ungleichungen genügen. Formel (11) enthält nach (7) für $n = 1$ auch die Regel für die höheren Ableitungen der durch (3) vorgelegten Funktion $f(t)$.

Die Ausdrücke $D_{kn}f$ lassen sich, statt nach Formel (6), auch als Summen von Produkten zweier Operatoren niedrigeren Grades aufbauen:

$$\binom{n}{\nu} D_{kn}f = \sum_{\varkappa=n-\nu}^{k-\nu} \binom{k}{\varkappa} D_{k-\varkappa,\nu}f \cdot D_{\varkappa,n-\nu}f; \tag{12}$$

$$\binom{n-1}{\nu-1} D_{kn}f = \sum_{\varkappa=n-\nu}^{k-\nu} \binom{k-1}{\varkappa} D_{k-\varkappa,\nu}f \cdot D_{\varkappa,n-\nu}f; \tag{13}$$

$$\binom{n-1}{\nu} D_{kn}f = \sum_{\varkappa=n-\nu}^{k-\nu} \binom{k-1}{\varkappa-1} D_{k-\varkappa,\nu}f \cdot D_{\varkappa,n-\nu}f \tag{14}$$

(gültig für $0 < \nu < n$).

Beweis: (12) bestätigt man durch Einsetzen von (8), indem man die aus der Binomialentwicklung von

$$\prod_{\mu} (1+x)^{r_\mu} = (1+x)^R \quad [\Sigma r_\mu = R]$$

zu erhaltende Gleichung

$$\sum_{(\lambda)} \prod_{\mu} \binom{r_\mu}{\lambda_\mu} = \binom{R}{\Lambda} \quad \begin{matrix}[0 \leqq \lambda_\mu \leqq r_\mu; \\ \Sigma\lambda_\mu = \Lambda;\ \Sigma r_\mu = R]\end{matrix}$$

beachtet. Wenn man diese Gleichung mit $\sigma \cdot \lambda_o$ vervielfacht, so gelangt man wegen

$$b \cdot \binom{a}{b} = a \cdot \binom{a-1}{b-1}$$

durch Summation über σ zu der Gleichung

$$\sum_{(\lambda)} (\Sigma\mu \cdot \lambda_\mu) \cdot \prod_{\mu} \binom{r_\mu}{\lambda_\mu} = (\Sigma\mu \cdot r_\mu) \cdot \binom{R-1}{\Lambda-1}$$
$$[0 \leqq \lambda_\mu \leqq r_\mu; \quad \Sigma\lambda_\mu = \Lambda; \quad \Sigma r_\mu = R].$$

Diese dient zusammen mit (8) zur Bestätigung von (13); und (14) ist die Differenz zwischen (12) und (13).

2.

Als Anwendung hierfür seien die Ableitungen der Umkehrfunktion zu einer gegebenen Funktion (mit nicht verschwindender erster Ableitung) berechnet: Es sei

$$y = f(x), \ x = g(y); \quad \text{also } x \equiv g(f(x)); \quad f'(x) \neq 0.$$

Daraus folgen die Gleichungen

$$D_{11}x = 1 = Dg \cdot Df;$$

$$D_{k1}x = 0 = \sum_{\nu=1}^{k} D^\nu g \cdot D_{k\nu}f \quad [k = 2, 3, \ldots, n].$$

Aus der ersten fließt $Dg = (Df)^{-1}$. Berechnet man aus diesen n Gleichungen für die n Unbekannten $Dg, D^2g, \ldots D^ng$ die letzte mittels Determinanten, so erhält man[4])

$$(15) \quad D^ng = (Df)^{-\binom{n+1}{2}} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \mathrm{Det}\,|A_{ik}| \quad [i, k = 1, 2, \ldots, n-1]$$
$$\text{mit } A_{ik} = D_{i+1,k}f \quad [k \leqq i+1]; \quad = 0 \quad [k > i+1].$$

Diese Determinante läßt sich zu einer anderen umformen, in der überall nur eine Ableitung von f steht (nur Operatoren 1. Grades). Man ziehe rechts einen Faktor $\frac{1}{(n-2)!}$ vor die Determinante und vervielfache dafür die zweite, ... k-te, ... $(n-1)$-te Spalte mit $(n-2), \ldots, (n-k), \ldots, 1$. Dann wird also

$$(16) \quad D^ng = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)!} \cdot (Df)^{-\binom{n+1}{2}} \cdot \mathrm{Det}\,|B^{(n)}_{i,k}| \quad [i, k = 1, 2, \ldots, n-1]$$
$$\text{mit } B^{(n)}_{i,k} = D_{i+1,1}f \ [k = 1]; \ = (n-k)D_{i+1,k}f \ [2 \leqq k \leqq i+1];$$
$$= 0 \ [i+1 < k \leqq n-1].$$

Wenn man in (12) und (13) für $k, n, \varkappa, \nu$ die Werte $i+1, k, \lambda-1, 1$ einsetzt, hierauf (12) mit n vervielfacht und davon (13) abzieht, so kommt man auf die Gleichung

$$(17) \quad (n-k)D_{i+1,k}f = \sum_{\lambda=k}^{i+1} \left\{ n\binom{i}{\lambda-1} - \binom{i+1}{\lambda-1} \right\} \cdot D_{i-\lambda+2,1}f \cdot D_{\lambda-1,k-1}f.$$

Die Klammer rechts verschwindet für $i = n-1$, $\lambda = i+1$; schreibt man daher

$$(18) \quad C^{(n)}_{i,k} = D^{i+1}f \ [k = 1]; \ = \alpha^{(n)}_{i,k} \cdot D^{i-k+2}f \ [2 \leqq k \leqq i+1];$$
$$= 0 \ [i+1 < k \leqq n-1]$$
$$\text{mit } \alpha^{(n)}_{i,k} = n \cdot \binom{i}{k-1} - \binom{i+1}{k-1},$$

so wird für $k > 1$

$$B^{(n)}_{i,k} = \sum_{\lambda=k}^{n-1} C^{(n)}_{i,\lambda} \cdot D_{\lambda-1,k-1}f.$$

Der zweite Faktor ist für alle Zeilen i derselbe, die Spalten B_{ik} sind also linear aus den Spalten C_{ik} zusammengesetzt, und aus (16) wird mit (18) die Darstellung

$$(19) \quad D^ng = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-2)!} \cdot (Df)^{-2n+1} \cdot \mathrm{Det}\,|C^{(n)}_{i,k}| \quad [i, k = 1, \ldots n-1].$$

---

[4]) L [1], Formel (6). Die dort daraus abgeleitete Formel (7) ist für $n > 3$ *nicht* richtig.

Von den Zahlen $\alpha_{i,k}^{(n)}$ in (18) bilden die in der Schrägreihe $i+1=k$ stehenden und ebenso die in der zweiten Spalte je eine arithmetische Reihe erster Ordnung mit den Differenzen 1 und $n-1$, und die anderen lassen sich bequem rekursiv aus ihnen berechnen:

$$\begin{aligned} &\alpha_{i,2}^{(n)} = i\cdot(n-1)-1; \quad \alpha_{k-1,k}^{(n)} = n-k; \\ &\alpha_{i,k}^{(n)} = \alpha_{i-1,k}^{(n)} + \alpha_{i-1,k-1}^{(n)} \quad [3 \leqq k \leqq i]. \end{aligned} \tag{20}$$

Durch Entwickeln der Determinante (19) entsteht die der Brunoschen Formel (8) entsprechende Darstellung

$$D^n g = (Df)^{-2n+1} \sum_{(\lambda)} (2n-2-\lambda_1)!\,(Df)^{\lambda_1} \prod_{\nu=2}^{n} \frac{1}{\lambda_\nu!}\left(-\frac{D^\nu f}{\nu!}\right)^{\lambda_\nu} \tag{21}$$

$$[0 \leqq \lambda_\nu;\ \sum_1^n \lambda_\nu = n-1;\ \sum_1^n \nu\,\lambda_\nu = 2n-2].$$

Für den Beweis mag es indessen bequemer sein, sie aus dem Potenzreihenansatz für f und g herzuleiten mittels der Bürmann-Lagrangeschen Umkehrformel[5])

$$\frac{d^n x}{dy^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{x}{y}\right)^n.$$

3.

Die Erweiterung der Regel (5) auf den Fall mehrerer Zwischenveränderlichen

$$\begin{aligned} &y = F(x_1, \ldots, x_\nu, \ldots); \quad x_\nu = \varphi_\nu(t); \\ &y = F(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_\nu(t), \ldots) = f(t) \end{aligned} \tag{22}$$

läßt sich ebenfalls mit Hilfe der Operatoren $D_{k\,n}$ anschreiben. Um Zahlenfaktoren in den Formeln zu vermeiden, ist es indessen zweckmäßig, neue Bezeichnungen zu wählen:

$$D^{k\,n} f = \frac{n!}{k!} D_{k\,n} f. \tag{23}$$

Statt (6) und der zweiten Gleichung von (7) hat man dann

$$D^{k\,n} f = \frac{1}{k}\cdot D(D^{k-1,\,n} f) + \frac{n}{k}\cdot Df \cdot D^{k-1,\,n-1} f, \tag{24}$$

$$D^{k\,1} f = \frac{1}{k!} D^k f; \tag{25}$$

in (8) tritt $n!$ an Stelle des $k!$ Die erste und dritte Gleichung von (7) und die Formeln (10), (11) bleiben sogar unverändert gültig, wenn die Operatoren-

[5]) L [5]; L [6], S. 138.

zeiger sämtlich nach oben gerückt werden. Insofern hätten zwar von vornherein die D^{kn} eingeführt werden können; bei Funktionen nur je einer Veränderlichen bieten indessen die D_{kn} den Vorzug, daß in den Formeln (6), (7), (8) keine Brüche auftreten. Bei mehreren Veränderlichen sind diese Brüche jedoch noch angenehmer als die Polynomialfaktoren, die sich sonst (insbesondere für $n = 1$) in (26) und den späteren Formeln einstellen würden. Ferner ist durch die Hochstellung der Zeiger jetzt unten Platz, um bei partiellen Ableitungen die Veränderliche anzudeuten, wie es beim Operator D üblich ist: es möge also $D_{(\nu)}$ die partielle Ableitung nach der ν-ten Veränderlichen bezeichnen, dementsprechend $D_{(\nu)}^{k,1} F = (1:k!)\, D_{(\nu)}^{k} F$; ebenso $D_{(\nu)}^{0,1} F = F$.

Eine der Gleichung (10) entsprechende Regel[6]) hat nun die Form

$$D^{kn} f = \sum_{\Lambda = n}^{k} \sum_{(\lambda)} D^{k\,(\lambda)} \varphi \cdot D^{(\lambda)\,n} F \quad [0 \leqq \lambda_\nu;\ \Sigma \lambda_\nu = \Lambda]. \tag{26}$$

Hierin bedeutet der erste Faktor folgendes:

$$D^{k,\,(\lambda)} \varphi = D^{k,\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \ldots)} \varphi = \sum_{(\alpha)} \prod_{\nu} D^{\alpha_\nu, \lambda_\nu} \varphi_\nu(t) \tag{27}$$

$$[0 \leqq \lambda_\nu \leqq \alpha_\nu;\ \Sigma \alpha_\nu = k].$$

Er läßt sich auch rekursiv berechnen. Schreiben wir die Zeigerzusammenstellung (λ), in welcher alle Zeiger λ_ν verschwinden mit Ausnahme desjenigen, welcher zur Funktion $\varphi_\tau(t)$ gehört und den Wert 1 haben soll, kurz als (δ_τ); $(\lambda - \delta_\tau)$ soll somit dieselbe Zusammenstellung bezeichnen wie (λ), nur daß der zur Funktion $\varphi_\tau(t)$ gehörige Zeiger um 1 verkleinert worden ist. Dann geht der Ausdruck (27) aus den Werten

$$D^{k,\,(\delta_\tau)} \varphi = D^{k\,1} \varphi_\tau; \quad D^{\Lambda,\,(\lambda)} \varphi = \prod_{\nu} (D\, \varphi_\nu)^{\lambda_\nu} \quad [\Sigma \lambda_\nu = \Lambda] \tag{28}$$

nach der Formel

$$D^{k,\,(\lambda)} \varphi = \frac{1}{k} D(D^{k-1,\,(\lambda)} \varphi) + \sum_{\tau} \frac{\lambda_\tau}{k} D\, \varphi_\tau \cdot D^{k-1,\,(\lambda - \delta_\tau)} \varphi \tag{29}$$

hervor, sobald $k > \Lambda > 1$ ist; für $k = \Sigma \lambda$ hat man nur das erste Glied wegzulassen, um die Formel noch anwenden zu können. Die Summation in (29) braucht nur auf diejenigen τ ausgedehnt zu werden, für die $\lambda_\tau > 0$ ist.

Der Operator $D^{(\lambda),\,n}$ des zweiten Faktors in (26) ist von der Ordnung λ_ν in x_ν und vom Grade n in F; der Grad ist höchstens gleich der Gesamtordnung Λ. In den Randfällen $n = 0$, $= 1$ und $= \Lambda$ ist sein Sinn:

$$\begin{aligned} &D^{(\lambda)\,0} F = 1 \ [\Lambda = 0],\ = 0 \ [\Lambda > 0]; \\ &D^{(\lambda)\,1} F = \Big(\prod_{\nu} D_{(\nu)}^{\lambda_\nu 1}\Big) F; \\ &D^{(\lambda)\,\Lambda} F = \Lambda! \prod_{\nu} \frac{(D_{(\nu)} F)^{\lambda_\nu}}{\lambda_\nu!}; \end{aligned} \tag{30}$$

[6]) Der Fall $n = 1$ findet sich bei TEIXEIRA [1].

für die Zwischenfälle ist er in folgender Weise zu bilden:

$$\lambda_\tau \cdot D^{(\lambda),\,n} F = D_{(\tau)} \left(D^{(\lambda-\delta_\tau),\,n} F\right) + n \cdot D_{(\tau)} F \cdot D^{(\lambda-\delta_\tau),\,n-1} F \tag{31}$$

$$[1 < n < \Lambda = \Sigma \lambda_\nu;\ \lambda_\tau > 0].$$

Die Rekursion kann nach jeder Veränderlichen x_τ vorgenommen werden, für die $\lambda_\tau > 0$ ist. Im Fall $n = \Lambda$ ist rechts das erste Glied fortzulassen, damit die Formel gültig bleibe, für $n = 1$ das zweite Glied. Zur unmittelbaren Berechnung aus Operatoren ersten Grades ist die nachstehende Formel tauglich, die (8) und (30) als Sonderfälle einschließt:

$$D^{(k_\sigma),\,n} F = \sum_{(\lambda_\tau)} \sum_{(\nu_{\sigma\tau})} n! \prod_\tau \frac{1}{\lambda_\tau!} \left(D^{(\nu_{\sigma\tau}),\,1} F\right)^{\lambda_\tau}; \tag{32}$$

die Summe ist zu erstrecken über alle möglichen Zusammenstellungen von Zahlengruppen (λ_τ), $(\nu_{1\tau}, \ldots \nu_{\sigma\tau} \ldots)$ — der Zeiger τ hat hier nur den Sinn, die verschiedenen Gruppen in einer solchen Zusammenstellung zu unterscheiden —, welche die Bedingungen

$$0 \leqq \lambda_\tau;\ 0 \leqq \nu_{\sigma\tau};\ 1 \leqq \sum_\sigma \nu_{\sigma\tau};\ \sum_\tau \lambda_\tau = n;\ \sum_\tau \nu_{\sigma\tau} \cdot \lambda_\tau = k_\sigma \tag{33}$$

befriedigen. Ein Beispiel möge die Anwendung von (31) und (32) zeigen: Nach (31) ist

$$D^{(41)\,3} F(x, y) = \tfrac{1}{4} D_x \left(D^{(31)\,3} F\right) + \tfrac{3}{4} F_x \cdot D^{(31)\,2} F$$

$$= \tfrac{1}{4} D_x (3 F_x^2 F_{xy} + 3 F_x F_{xx} F_y) + \tfrac{3}{4} F_x (F_x F_{xxy} + F_{xx} F_{xy} + \tfrac{1}{3} F_{xxx} F_y)$$

oder ebensogut

$$D^{(41)\,3} F(x, y) = D_y \left(D^{(40)\,3} F\right) + 3 F_y \cdot D^{(40)\,2} F$$

$$D_y \left(\tfrac{3}{2} F_x^2 F_{xx}\right) + 3 F_y \left(\tfrac{1}{3} F_x F_{xxx} + \tfrac{1}{4} F_{xx}^2\right),$$

nach (32) ist

$$D^{(41)\,3} F(x, y) \quad 3! \left\{D^{(10)\,1} F \cdot D^{(20)\,1} F \cdot D^{(11)\,1} F + D^{(10)\,1} F \cdot D^{(30)\,1} F \cdot D^{(01)\,1} F\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2} \left(D^{(10)\,1} F\right)^2 \cdot D^{(21)\,1} F + \tfrac{1}{2} \left(D^{(20)\,1} F\right)^2 \cdot D^{(01)\,1} F\right\}$$

$$= 6 \left\{F_x \cdot \tfrac{1}{2} F_{xx} \cdot F_{xy} + F_x \cdot \tfrac{1}{6} F_{xxx} \cdot F_y + \tfrac{1}{2} F_x^2 \cdot \tfrac{1}{2} F_{xxy} + \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{1}{2} F_{xx}\right)^2 \cdot F_y\right\}$$

$$3 F_x F_{xx} F_{xy} + F_x F_{xxx} F_y + \tfrac{3}{2} F_x^2 F_{xxy} + \tfrac{3}{4} F_{xx}^2 F_y.$$

Der Beweis für (26) kann auf folgendem Wege geführt werden: Für $k = n = 1$ ist (26) die bekannte Regel für die totale Ableitung

$$\frac{df}{dt} = \sum_\nu D\, \varphi_\nu \cdot D_{(\nu)} F.$$

Setzen wir voraus, (26) sei für alle n richtig mit $k = 1$ an Stelle von k; zugleich soll (31) für alle $\Lambda < k$ in Ordnung befunden sein. Durch (27) ist dann $D^{k\,(\lambda)} \varphi$ erklärt; (29) folgt aus (27) vermöge (24). Für $\Lambda = k$ werden die $D^{(\lambda)\,n} F$ jetzt durch (31) erklärt, und zwar unabhängig von der Wahl der zur Rekursion

benutzten Veränderlichen: dies erkennt man, indem man $D^{(\lambda)\,n}F$ einmal zuerst nach λ_1 reduziert, die übriggebliebenen Ausdrücke $D^{(\lambda-\delta_1)\,n}F$ und $D^{(\lambda-\delta_1),\,n-1}F$ darauf nach λ_2; ein andermal zuerst nach λ_2, darauf nach λ_1. Wenn man nun in (24) für $D^{k-1,\,n}f$ und $D^{k-1,\,n-1}f$ die Darstellung (26) einsetzt, so ergibt sich wegen (29) und (31) ihre Gültigkeit auch für $D^{k\,n}f$. — (32) beweist man wie (8) durch Potenzreihenansatz und Polynomialformel.

Die Regel (26) ist nun aber nicht die einzige, welche bei mehreren Veränderlichen der Gleichung (10) entspricht. Hat man es z. B. mit mehreren Funktionen F_ν zu tun, welche von den gleichen Veränderlichen x_μ abhängen, die wiederum als Funktionen φ_μ einer Unveränderlichen t gegeben sind, dann entsteht ein System mittelbarer Funktionen $f_\nu(t) = F_\nu(\varphi_\mu(t))$. Hier lassen sich für die linke Seite die Ausdrücke (27) bilden; und wenn man die einfachen Fälle (28) zuerst nachprüft und dann auf diese mittels (29) zurückgeht, so kommt man zu der Regel

$$(34)\quad D^{k\,(n)}f = \sum_{\Lambda=N}^{k} \sum_{(\lambda)} D^{k\,(\lambda)}\varphi \cdot D^{(\lambda)\,(n)}F \quad [0 \leqq \lambda_\mu;\ \Sigma\lambda_\mu = \Lambda;\ \Sigma n_\nu = N].$$

Hier wurden entsprechend (27) gewisse Glieder vorweg vereinigt:

$$(35)\quad D^{(\lambda)\,(n)}F = \sum_{(\lambda_{\mu\nu})} \prod_{\nu} D^{(\lambda_{1\nu},\ldots\lambda_{\mu\nu},\ldots)n_\nu}F_\nu$$

$$[0 \leqq \lambda_{\mu\nu};\ \sum_{\nu}\lambda_{\mu\nu} = \lambda_\mu;\ \sum_{\mu}\lambda_{\mu\nu} \geqq n_\nu].$$

Für jedes verschwindende n_ν sind hierbei nach (30) alle zugehörigen $\lambda_{\mu\nu} = 0$ zu nehmen, solch ein Faktor ist also fortzulassen. Auch diese Größen (35) lassen sich stufenweise bilden nach der Gleichung (36), die aus (31) und (35) folgt[7]):

$$(36)\quad k_\mu \cdot D^{(k)\,(n)}F = D_{(\mu)}(D^{(k-\delta_\mu)\,(n)}F) + \sum_{\nu} n_\nu \cdot D_{(\mu)}F \cdot D^{(k-\delta_\mu)\,(n-\delta_\nu)}F$$

$$[1 < N < K;\ \Sigma n = N;\ \Sigma k = K;\ k_\mu > 0],$$

wo wie in (31) die Reduktion nach jeder Veränderlichen x_μ erfolgen kann, deren Ordnungszeiger k_μ nicht verschwindet. Ohne das erste Glied gilt die Formel (36), von der (24), (29) und (31) Sonderfälle sind, auch noch für $N = K$. Für $N = 1$, d. h. $(n) = (\delta_\nu)$ benutze man

$$(37)\quad D^{(k)\,(n)}F = D^{(k)\,m}F \quad [n_\nu = m,\ \text{alle übrigen } n = 0].$$

Setzt man nun (34) in (26) ein, so ergibt sich (denn da die auftretenden Funktionen nur stetige Ableitungen zu haben brauchen und im übrigen ganz willkürlich sind, so ist ein gliedweiser Vergleich zulässig) eine Regel für den Fall, daß eine Funktion F von mehreren Zwischenveränderlichen x_ν vorliegt,

[7]) In anderer Bezeichnung von Amaldi [4] angegeben. Dort und bei Mambriani [7] sind auch weitere Untersuchungen über den kombinatorischen Aufbau der Ausdrücke (35) zu finden.

welche Funktionen φ_ν von mehreren Urveränderlichen t_ϱ sind: also $f(t_\varrho) = F(\varphi_\nu(t_\varrho))$. Man kann sie auch mittels (30) und (31) aus (26) ableiten, worauf Einsetzen von (38) in (26) eben (34) liefern würde. Die Regel[8]) lautet:

$$(38) \quad D^{(k)\,n} f = \sum_{\Lambda=n}^{K} \sum_{(\lambda)} D^{(k)\,(\lambda)} \varphi \cdot D^{(\lambda)\,n} F \quad [0 \leqq \lambda_\nu;\ \Sigma \lambda_\nu = \Lambda;\ \Sigma k_\varrho = K].$$

Setzt man schließlich sowohl (34) wie (38) in (26) ein, so findet man die Regel für den Fall, daß ein System von Funktionen F_ν vorliegt, welche von einem System Zwischenveränderlicher x_μ abhängen, die ihrerseits als Funktionen φ_μ mehrerer Urveränderlichen t_ϱ gegeben sind, so daß ein System mittelbarer Funktionen von mehreren Veränderlichen $f_\nu(t_\varrho) = F_\nu(\varphi_\mu(t_\varrho))$ entsteht:

$$(39) \quad D^{(k)\,(n)} f = \sum_{\Lambda=N}^{K} \sum_{(\lambda)} D^{(k)\,(\lambda)} \varphi \cdot D^{(\lambda)\,(n)} F$$
$$[\Sigma k = K;\quad \Sigma n = N;\quad 0 \leqq \lambda_\mu;\quad \Sigma \lambda = \Lambda].$$

Erst diese Formel ist die vollständige Verallgemeinerung zu (10); sie umfaßt (34) und (38), aber auch (26) und (10) als Sonderfälle, und sie läßt sich ebenso leicht wie (10) zur Kettenregel verallgemeinern.

Die Kettenregel für mehrere Gruppen von Zwischenveränderlichen in voller Allgemeinheit hinzuschreiben, würde wegen zu vieler Zeiger an den Hauptbuchstaben doch wohl ein unklares Bild geben. Es seien darum nur drei Zwischengruppen angenommen; das Aussehen der Regel bei mehr Zwischengruppen ist aus diesem Beispiel dann mühelos zu entnehmen:

$$(40) \quad x_\lambda = \varphi_\lambda(t);\quad y_\mu = \psi_\mu(\ldots x_\lambda \ldots);$$
$$z_\nu = \chi_\nu(\ldots y_\mu \ldots);\quad F(\ldots z_\nu \ldots) = f(t).$$

An die Stelle der Zeiger λ_ν von Formel (11) tritt hier je ein ganzer Satz solcher Zeiger: $\alpha_\lambda, \beta_\mu, \gamma_\nu$, die die Ordnung (wenn sie an dem Operator in der vorderen Gruppe stehen) oder den Grad (wenn sie in der zweiten Zeigergruppe stehen) des betreffenden Faktors in bezug auf die zugehörige Zwischenveränderliche x_λ, y_μ, z_ν anzeigen. Nur zur Erhöhung der Übersichtlichkeit werden die Summanden, wie schon in (26), (34), (38) und (39), noch nach gleichen Summenwerten (Λ) zusammengefaßt. Die Kettenregel sieht dann so aus:

$$(41) \quad D^{k\,n} f = \sum_{(\Lambda)} \sum_{(\alpha\beta\gamma)} D^{k\,(\alpha)} \varphi \cdot D^{(\alpha)\,(\beta)} \psi \cdot D^{(\beta)\,(\gamma)} \chi \cdot D^{(\gamma)\,n} F.$$

Die Summe ist zu erstrecken über alle Zusammenstellungen

$$(\Lambda) = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3) \text{ und } (\alpha, \beta, \gamma) = (\ldots \alpha_\lambda \ldots, \ldots \beta_\mu \ldots, \ldots \gamma_\nu \ldots),$$

die folgende Bedingungen erfüllen:

$$(42) \quad k = \Lambda_0 \geqq \Lambda_1 \geqq \Lambda_2 \geqq \Lambda_3 \geqq \Lambda_4 = n;\ 0 \leqq \alpha_\lambda,\ 0 \leqq \beta_\mu,\ 0 \leqq \gamma_\nu;$$
$$\Sigma \alpha_\lambda = \Lambda_1,\ \Sigma \beta_\mu = \Lambda_2,\ \Sigma \gamma_\nu = \Lambda_3.$$

[8]) Der Fall $n = 1$ ist von AMALDI [4] und MAMBRIANI [7] gegeben worden.

Hängen die x_λ und damit die ganze mittelbare Funktion f statt von einer Urveränderlichen t von mehreren $(\ldots t_\varrho \ldots)$ ab:

$$(43) \qquad \begin{aligned} x_\lambda &= \varphi_\lambda(\ldots t_\varrho \ldots); \quad y_\mu = \psi_\mu(\ldots x_\lambda \ldots); \\ z_\nu &= \chi_\nu(\ldots y_\mu \ldots); \quad F(\ldots z_\nu \ldots) = f(\ldots t_\varrho \ldots), \end{aligned}$$

so braucht man an Stelle von (41) die Formel

$$(44) \qquad D^{(k)\,n} f = \sum_{(1)} \sum_{(\alpha,\beta\gamma)} D^{(k)\,(\alpha)} \varphi \cdot D^{(\alpha)\,(\beta)} \psi \cdot D^{(\beta)\,(\gamma)} \chi \cdot D^{(\gamma)\,n} F$$

mit denselben Bedingungen (42); nur ist jetzt $\Sigma k_\varrho = K = \Lambda_0$ einzusetzen. — Für den Fall, daß statt einer Funktion $f(\ldots t_\varrho \ldots) = F(\ldots z_\nu \ldots)$ deren mehrere vorhanden sind und für dieses System einer der in (26) oder (31) eingeführten Ausdrücke $D^{k\,(n)} f$ oder $D^{(k)\,(n)} f$ — je nach der Anzahl der Urveränderlichen kommt der eine oder der andere in Betracht — mittels der Zwischenveränderlichen darzustellen ist, läßt sich die erforderliche Änderung der Formel (41) oder (44) leicht vornehmen.

Die Anwendung der Kettenregel (41) soll zum Schluß an dem einfachsten nicht trivialen Beispiel gezeigt werden:

$$x_\mu = \varphi_\mu(t) \ [\mu = 1, 2]; \quad y_\nu = \psi_\nu(x_1, x_2) \ [\nu = 1, 2]; \quad F(y_1, y_2) = f(t).$$

Verlangt sei, $f''(t)$ durch die Ableitungen von F, ψ_1, ψ_2, φ_1, φ_2 auszudrücken. Es ist mithin $k = 2$, $n = 1$ zu nehmen, da $D^{21} f = \frac{1}{2} f''$. Den Veränderlichen $x_1, x_2; y_1, y_2$ sollen die Zeiger $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$ zugeordnet sein. Dann ist nach (41)

$$D^{21} f = \sum_{\mathsf{A},\,\mathsf{B}} \sum_{(\alpha,\,\beta)} D^{2\,(\alpha)} \varphi \cdot D^{(\alpha)\,(\beta)} \psi \cdot D^{(\beta)\,1} F,$$

wobei die nichtnegativen ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, A, B auf jede mögliche Weise einmal so einzusetzen sind, daß dabei

$$2 \geqq \mathsf{A} \geqq \mathsf{B} \geqq 1; \ \alpha_1 + \alpha_2 = \mathsf{A}, \ \beta_1 + \beta_2 = \mathsf{B}.$$

Für die Zeigersummen A, B gibt es hiernach drei Möglichkeiten: $\mathsf{A} = \mathsf{B} = 1$; $\mathsf{A} = 2$, $\mathsf{B} = 1$; $\mathsf{A} = \mathsf{B} = 2$. Zu $\mathsf{A} = 1$ gibt es zwei Möglichkeiten für die Wahl der (α): entweder ist $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0)$ oder $= (0, 1)$; zu $\mathsf{A} = 2$ gibt es drei: $(\alpha_1, \alpha_2) = (2, 0)$ oder $(1, 1)$ oder $(0, 2)$. Mit den entsprechenden Möglichkeiten für (β) erhält man im ganzen $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 19$ verschiedene Zusammenstellungen (α, β). Es wird also

$$\begin{aligned} D^{21} f = {} & D^{2\,(10)} \varphi \cdot D^{(10)\,(10)} \psi \cdot D^{(10)\,1} F + D^{2\,(01)} \varphi \cdot D^{(01)\,(10)} \psi \cdot D^{(10)\,1} F \\ & + D^{2\,(10)} \varphi \cdot D^{(10)\,(01)} \psi \cdot D^{(01)\,1} F + D^{2\,(01)} \varphi \cdot D^{(01)\,(01)} \psi \cdot D^{(01)\,1} F \\ & + D^{2\,(20)} \varphi \cdot D^{(20)\,(10)} \psi \cdot D^{(10)\,1} F + D^{2\,(11)} \varphi \cdot D^{(11)\,(10)} \psi \cdot D^{(10)\,1} F + D^{2\,(02)} \varphi \cdot D^{(02)\,(10)} \psi \cdot D^{(10)\,1} F \\ & + D^{2\,(20)} \varphi \cdot D^{(20)\,(01)} \psi \cdot D^{(01)\,1} F + D^{2\,(11)} \varphi \cdot D^{(11)\,(01)} \psi \cdot D^{(01)\,1} F + D^{2\,(02)} \varphi \cdot D^{(02)\,(01)} \psi \cdot D^{(01)\,1} F \\ & + D^{2\,(20)} \varphi \cdot D^{(20)\,(20)} \psi \cdot D^{(20)\,1} F + D^{2\,(11)} \varphi \cdot D^{(11)\,(20)} \psi \cdot D^{(20)\,1} F + D^{2\,(02)} \varphi \cdot D^{(02)\,(20)} \psi \cdot D^{(20)\,1} F \\ & + D^{2\,(20)} \varphi \cdot D^{(20)\,(11)} \psi \cdot D^{(11)\,1} F + D^{2\,(11)} \varphi \cdot D^{(11)\,(11)} \psi \cdot D^{(11)\,1} F + D^{2\,(02)} \varphi \cdot D^{(02)\,(11)} \psi \cdot D^{(11)\,1} F \\ & + D^{2\,(20)} \varphi \cdot D^{(20)\,(02)} \psi \cdot D^{(02)\,1} F + D^{2\,(11)} \varphi \cdot D^{(11)\,(02)} \psi \cdot D^{(02)\,1} F + D^{2\,(02)} \varphi \cdot D^{(02)\,(02)} \psi \cdot D^{(02)\,1} F. \end{aligned}$$

An erster Stelle treten in diesen 19 Produkten 5 verschiedene Faktoren auf:

$$D^{2\,(10)}\,\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}; \qquad D^{2\,(01)}\,\varphi = \frac{1}{2}\frac{d^2\varphi_2}{dt^2};$$

$$D^{2\,(20)}\,\varphi = \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2; \qquad D^{2\,(11)}\,\varphi = \frac{d\varphi_1}{dt}\cdot\frac{d\varphi_2}{dt}; \qquad D^{2\,(02)}\,\varphi = \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2.$$

Der mittlere Faktor hat in jedem Gliede einen anderen Wert:

$$D^{(10)\,(10)}\,\psi = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}; \qquad D^{(01)\,(10)}\,\psi = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}; \qquad D^{(10)\,(01)}\,\psi = \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}; \qquad D^{(01)\,(01)}\,\psi = \frac{\partial}{\partial}$$

$$D^{(20)\,(10)}\,\psi = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}; \qquad D^{(11)\,(10)}\,\psi = \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\,\partial x_2}; \qquad D^{(02)\,(10)}\,\psi = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2^2}$$

$$D^{(20)\,(01)}\,\psi = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}; \qquad D^{(11)\,(01)}\,\psi = \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\,\partial x_2}; \qquad D^{(02)\,(01)}\,\psi = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_2^2}$$

$$D^{(20)\,(20)}\,\psi = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right)^2; \qquad D^{(11)\,(20)}\,\psi = 2\,\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}; \qquad D^{(02)\,(20)}\,\psi = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right)^2;$$

$$D^{(20)\,(11)}\,\psi = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}; \qquad D^{(11)\,(11)}\,\psi = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}; \qquad D^{(02)\,(11)}\,\psi = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial}{\partial}$$

$$D^{(20)\,(02)}\,\psi = \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right)^2; \qquad D^{(11)\,(02)}\,\psi = 2\,\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}; \qquad D^{(02)\,(02)}\,\psi = \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)^2.$$

An dritter Stelle steht eine dieser fünf Größen:

$$D^{(10)\,1}F = \frac{\partial F}{\partial y_1}; \qquad D^{(01)\,1}F = \frac{\partial F}{\partial y_2};$$

$$D^{(20)\,1}F = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}; \qquad D^{(11)\,1}F = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1\,\partial y_2}; \qquad D^{(02)\,1}F = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}.$$

Literaturverzeichnis.

[1] F. G. Teixeira, Giorn. mat. Battaglini **18** (1880), S. 301—309.
[2] A. Voss, Enz. Math. Wiss. II, 1a, S. 87—88.
[3] J. Molk, Enc. Sci. Math. II, 1a, S. 332—336.
[4] U. Amaldi, Rend. Palermo **42** (1917), S. 94—115.
[5] Hass, Mitteilungen Math. Ges. Hamburg **6** (1926), S. 163—189.
[6] Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, 3. Aufl. Berlin 1929.
[7] A. Mambriani, Boll. Un. Mat. Ital. **13** (1934), S. 217—222, 284—288; **14** (1935), S. 10—16.

(Eingegangen am 20. September 1942.)

Über den Flächeninhalt dehnungsbeschränkter Flächen.

Von

Georg Nöbeling in Erlangen.

Einleitung.

Bei der Frage nach der Eindeutigkeit des Flächeninhalts verweist man gern auf die bekannte Arbeit von A. Kolmogoroff [1]), in welcher u. a. bewiesen wird, daß die von ihm axiomatisch eingeführten Maße — wir nennen sie kurz Kolmogoroff-Maße — für jede dehnungsbeschränkte Fläche [2]) zusammenfallen und gleich dem klassischen Integral für den Flächeninhalt sind. Damit wäre die Eindeutigkeitsfrage für die dehnungsbeschränkten Flächen erledigt, *wenn* die zahlreichen, von anderen Autoren angegebenen Flächenmaße Kolmogoroff-Maße wären. Dies ist aber keineswegs der Fall [3]): weder das Janzen-Maß, noch das Grosssche Minimalmaß, noch das integralgeometrische Favard-Maß ist ein Kolmogoroff-Maß (das Hausdorff-Maß ist ein Kolmogoroff-Maß; bei anderen Maßen ist diese Frage noch ungeklärt).

Bezüglich der Eindeutigkeitsfrage besteht also noch eine Lücke. Wir wollen sie ausfüllen, indem wir zeigen, daß alle genannten Maße, und dazu noch einige andere, für jede dehnungsbeschränkte Fläche zusammenfallen und gleich dem klassischen Integral sind. Dies ist — sogleich für die k-dimensionalen Flächen im R_n durchgeführt — der wesentliche Inhalt der vorliegenden Arbeit [4]).

[1]) A. Kolmogoroff, Ein Beitrag zur Maßtheorie. Math. Annalen **107** (1933), S. 351—366.

[2]) Eine dehnungsbeschränkte Fläche ist ein dehnungsbeschränktes Bild $\pi(\tilde{M}) = M$ eines abgeschlossenen Quadrates $\tilde{M}$; dabei heißt eine Abbildung π dehnungsbeschränkt, wenn für je zwei Punkte p und q des Urbildes die Abstandsungleichung $\overline{\pi(p), \pi(q)} \leq c \cdot \overline{pq}$ gilt (c eine Konstante). Die Dehnungsbeschränktheit ist gleichbedeutend mit der Rektifizierbarkeit im Sinne von H. Lebesgue, d. h. der Beschränktheit der totalen Differenzenquotienten der die Abbildung π vermittelnden Funktionen. Jede stetig differenzierbare Fläche ist dehnungsbeschränkt.

[3]) G. Nöbeling, Über die Flächenmaße im Euklidischen Raum. Erscheint demnächst in den Math. Annalen.

[4]) Wir haben der Kolmogoroff-Arbeit[1]) auch in methodischer Hinsicht vieles entnommen. Beispielsweise haben unsere Sätze 1 und 2 ihre genauen Analoga bei Kolmogoroff. Ebenso ist unser Hilfssatz einschließlich des Beweises fast derselbe wie der entscheidende Hilfssatz bei Kolmogoroff, dessen Beweis leider durch Druckfehler entstellt ist.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Voraussetzung der Dehnungsbeschränktheit vielleicht abgeschwächt oder durch eine andere ersetzt werden kann, daß aber irgendeine derartige Voraussetzung für die Eindeutigkeit des Flächeninhalts unentbehrlich ist. Denn für beliebige topologische, zweidimensionale Flächen (topologische Bilder der Quadratfläche) im Euklidischen R_k fallen die verschiedenen Flächenmaße im allgemeinen nicht zusammen[3]).

§ 1.

Die Sätze.

Es seien R_n und R_k ein n- bzw. k-dimensionaler Cartesischer Raum ($n > k$) mit rechtwinkligen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_k$.

Satz 1. *Es sei* $M = \pi(\widetilde{M}) \subset R_n$ *ein dehnungsbeschränktes Bild einer analytischen*[5]) *Menge* $\widetilde{M} \subset R_k$[6]). *Dann haben für* M *die* k*-dimensionalen Maße*[7]) *von* Janzen, Carathéodory, Gross, Hausdorff, Favard, Kolmogoroff *und* Gillespie *sämtlich denselben Wert* $\mu(M)$.

Die dehnungsbeschränkte Abbildung π des Satzes 1 werde durch die Funktionen $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ oder in vektorieller Schreibweise durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mathfrak{y})$ oder $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir π sofort in einer offenen Obermenge von $\widetilde{M}$, sogar im

[5]) Es sei R ein metrischer Raum. Dann heißt eine Teilmenge M von R analytisch oder Suslinsch in R, wenn M folgendermaßen darstellbar ist: Jedem System $n_1, \ldots, n_j$ endlich vieler natürlicher Zahlen sei eine offene Menge $M_{n_1 \ldots n_j} \subset R$ zugeordnet; zu jeder Folge $\nu = \{n_j\}$ natürlicher Zahlen werde der Durchschnitt $M_\nu = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \ldots$ gebildet; dann ist $M = \sum M_\nu$, wobei über alle Folgen ν natürlicher Zahlen summiert wird. — Man kommt zu denselben analytischen Mengen, wenn man statt der offenen Mengen abgeschlossene Mengen benutzt. Außerdem kann man $M_{n_1} \supset M_{n_1 n_2} \supset \ldots$ annehmen (Monotonie des erzeugenden Systems). — Jede in R Borelsche Menge ist analytisch in R. — Ist R ein vollständiger, metrischer Raum und A analytisch in R, so ist A auch analytisch in jedem anderen, A enthaltenden metrischen Raum; man nennt daher A in diesem Fall absolut analytisch. Wir haben es im folgenden nur mit absolut analytischen Mengen zu tun. — Jede analytische Menge eines Euklidischen Raumes ist Lebesgue-meßbar. — Zur Theorie der analytischen Mengen vgl. z. B. F. Hausdorff, Mengenlehre, Leipzig 1927; H. Hahn, Reelle Funktionen, Leipzig 1932; N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930.

[6]) Wir treffen für alles weitere die folgende Verabredung: Bei der betrachteten Abbildung π werden Bildmenge und Urbildmenge stets mit demselben Buchstaben bezeichnet; zur Unterscheidung trägt der Buchstabe der Urbildmenge das Zeichen $\sim$.

[7]) Zur Definition dieser Maße vgl. G. Nöbeling, Über die Länge der Euklidischen Kontinuen. Jahresbericht der DMV **52** (1942), S. 132 oder a. a. O.[3]), sowie die daselbst genannte Originalliteratur. Man überträgt die in den genannten beiden Arbeiten für $k = 1$ oder $k = 2$ angegebenen Definitionen ohne weiteres auf beliebiges k. Soweit die beiden Arbeiten die im folgenden von uns betrachteten Maße nicht enthalten, führen wir die Definitionen an den betreffenden Stellen der vorliegenden Arbeit an.

ganzen R_k, als definiert annehmen[8]). Dann sind auf einer maßgleichen Teilmenge $\widetilde{M}'$ von $\widetilde{M}$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ vorhanden und meßbar[9]). Dasselbe gilt infolgedessen auch für

$$D(\mathfrak{y}) = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial (y_1, \ldots, y_k)}\right)^2},$$

wobei über alle Kombinationen $i_1 \ldots i_k$ von Indizes $\leqq n$ summiert wird. Auf $\widetilde{M} - \widetilde{M}'$ setzen wir $D(\mathfrak{y}) = 0$. Also ist das klassische Lebesgue-Integral

$$I(\widetilde{M}) = \int_{\widetilde{M}} D(\mathfrak{y})\, dy_1 \ldots dy_k \leqq +\infty$$

vorhanden.

Satz 2. *Es sei $M = \pi(\widetilde{M}) \subset R_n$ ein umkehrbar eindeutiges, dehnungsbeschränktes Bild einer analytischen Menge $\widetilde{M} \subset R_k$. Dann ist $\mu(M) = I(\widetilde{M})$.*

Nun sei $\widetilde{F}$ der k-dimensionale Einheitswürfel des R_k und $F = \pi(\widetilde{F})$ ein eindeutiges, stetiges Bild $\subset R_n$ von $\widetilde{F}$. Dann heißt $F = \pi(\widetilde{F})$ eine stetige, k-dimensionale Fläche (gleichgültig, ob F als Punktmenge k-dimensional ist oder nicht; maßgebend ist also die Dimension des Urbildes). Ist dabei die Abbildung π dehnungsbeschränkt, so nennen wir auch die stetige Fläche $F = \pi(\widetilde{F})$ dehnungsbeschränkt.

Satz 3. *Es sei $F = \pi(\widetilde{F})$ eine stetige, k-dimensionale, dehnungsbeschränkte Fläche im R_n. Dann haben für F auch die k-dimensionalen Flächenmaße von* Lebesgue, Peano *und* Radó *den Wert $I(\widetilde{F})$.*

§ 2.

Ein Hilfssatz.

Zunächst führen wir folgende Bezeichnungen ein. Allgemein bezeichnen wir, wenn L ein linearer Teilraum des R_n ist, mit π_L die Orthogonalprojektion in L und setzen $\pi_L(N) = N_L$ für eine beliebige Menge oder einen Punkt N des R_n.

Hilfssatz. Durch die Gleichungen $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sei eine dehnungsbeschränkte Abbildung π des R_k in den R_n gegeben. Auf der kompakten Menge $\widetilde{P}$ des R_k seien die Funktionen x_i gleichmäßig total differen-

[8]) M. D. Kirszbraun, Über die zusammenziehenden und Lipschitzsche Transformationen. Fund. Math. **22** (1934), S. 77—108.

[9]) H. Rademacher, Über partielle und totale Differenzierbarkeit ... Math. Annalen **79** (1918), S. 340—359; vgl. auch O. Haupt u. G. Aumann, Differential- und Integralrechnung, Leipzig 1938, Bd. 3, S. 134.

zierbar[10]). Es sei $\mathfrak{y}_0$ ein Punkt von $\widetilde{P}$, $\mathfrak{x}_0 = \pi(\mathfrak{y}_0)$ sein Bild und T der durch die k Vektoren $\left\{\frac{\partial x_1}{\partial y_j}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial y_j}\right\}$ $(j = 1, \ldots, k)$ im Punkt $\mathfrak{x}_0 = \pi(\mathfrak{y}_0)$ aufgespannte, höchstens k-dimensionale, lineare, tangentiale Teilraum des R_n. Weiter sei $\widetilde{Q}$ eine Teilmenge von $\widetilde{P}$; die obere Grenze der Abstände ihrer Punkte von $\mathfrak{y}_0$ heiße d; es sei $Q = \pi(\widetilde{Q})$. Schließlich sei ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt[11]):

(1) $m(Q_T) = I(\widetilde{Q}) + \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta| < \varepsilon$ für hinreichend kleines d.

Beweis. Wir beweisen gleichzeitig mit (1) noch eine zweite Behauptung. Es sei E eine k-dimensionale Ebene des R_n und $c(E)$ im Falle dim $T = k$ der Faktor, mit dem sich die (k-dimensionalen) Inhalte der Teilmengen von T bei Projektion in E multiplizieren; im Falle dim $T < k$ sei $c(E) = \frac{1}{\sqrt{l}}$ mit $l = \binom{n}{k}$. Die zweite Behauptung lautet dann:

(2) $m(Q_E) = c(E) \cdot I(\widetilde{Q}) + \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta| < \varepsilon$ für hinreichend kleines d.

Um (1) und (2) zu beweisen, bezeichnen wir mit α die affine Abbildung

(3) $$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_0 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}},$$

wobei ein Vektor als einzeilige Matrix aufzufassen ist, $\frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}$ die k-zeilige und n-spaltige Funktionalmatrix $\left(\frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial \mathfrak{y}_j}\right)$ an der Stelle $\mathfrak{y}_0$ bedeutet und das Matrizenprodukt $(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}$ Zeile mal Spalte zu nehmen ist. Für ein beliebiges

[10]) Das heißt folgendes: Erstens existieren in jedem Punkt $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ von $\widetilde{P}$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$, deren k-zeilige und n-spaltige Matrix wir mit $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{y}}$ bezeichnen. Zweitens existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, daß für je zwei Punkte $\mathfrak{y}' = (y_1', \ldots, y_k')$, $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_k) \in \widetilde{P}$ mit dem Abstand $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}| < \delta$ und ihre Bildpunkte $\mathfrak{x}' = (x_1', \ldots, x_n')$, $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ gilt:

$$x_i' = x_i + \sum_{j=1}^{k} (y_j' - y_j) \frac{\partial x_i}{\partial y_j} + d_i \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (y_j' - y_j)^2}$$

mit $\sqrt{\Sigma d_i^2} < \varepsilon$ oder vektoriell:

(*) $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x} + (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{d} \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}|$ mit $|\mathfrak{d}| < \varepsilon$ für $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}| < \delta$, $\mathfrak{y} \in \widetilde{P}$

[vgl. die Erläuterungen im Text zu (3)]. — Wählt man $y_j' = y_j + h$ für ein festes j und $y_j' = y_j$ für die übrigen j, so ergibt sich $\frac{1}{h}(x_i' - x_i) = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} + d_i$ mit $\sqrt{\Sigma d_i^2} < \varepsilon$ für $|h| < \delta$ und beliebiges $\mathfrak{y} \in \widetilde{P}$; also ist $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ stetig auf $\widetilde{P}$.

[11]) m bedeutet das äußere LEBESGUEsche Maß im R_k bzw. einer k-dimensionalen Ebene des R_n.

$\varepsilon_1 > 0$ existiert dann ein $d(\varepsilon_1) > 0$ derart, daß für je zwei Punkte $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}''$ aus $\widetilde{P}$ mit Abständen $\leqq d(\varepsilon_1)$ von $\mathfrak{y}_0$ die Ungleichung

$$|\mathfrak{x}'_E - \mathfrak{x}''_E| = |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E| + \zeta \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| \quad \text{mit} \quad |\zeta| < \varepsilon_1 \tag{4}$$

gilt [12]).

Wir unterscheiden weiter zwei Fälle.

Erster Fall: $\dim T_E = k$. Dann ist auch $\dim T = k$, also $D(\mathfrak{y}_0) \neq 0$. Außerdem ist $c(E) > 0$. Ist speziell $E = T$, so ist $c(T) = 1$ und (2) ist identisch mit (1). Wir brauchen also nur (2) zu beweisen.

Aus (4) folgt, da wegen $D(\mathfrak{y}_0) \neq 0$ und $\dim T_E = k$ die affine Abbildung $\alpha_E = \tau_E \alpha$ nicht ausgeartet ist und daher der Quotient $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| / |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E|$ eine endliche obere Schranke t besitzt, die Ungleichung

$$(1 - t\varepsilon_1) \cdot |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E| \leqq |\mathfrak{x}'_E - \mathfrak{x}''_E| \leqq (1 + t\varepsilon_1) \cdot |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E|. \tag{5}$$

Da der Lebesguesche Inhalt m bei dehnungsloser Abbildung nicht größer wird[1]), also bei dehnungsbeschränkter Abbildung sich höchstens mit der k-ten Potenz der Dehnungsschranke multipliziert, folgt aus (5), wenn $d < d(\varepsilon_1)$ ist:

$$(1 - t\varepsilon_1)^k \cdot m(\alpha_E(\widetilde{Q})) \leqq m(Q_E) \leqq (1 + t\varepsilon_1)^k \cdot m(\alpha_E(\widetilde{Q})),$$

also

$$m(Q_E) = m(\alpha_E(\widetilde{Q})) + \iota \cdot m(\alpha_E(\widetilde{Q})) \text{ mit } |\iota| < (1 + t\varepsilon_1)^k - 1 = \varepsilon_2. \tag{6}$$

Nun ist $\alpha_E(\widetilde{Q}) = \tau_E \alpha(\widetilde{Q})$ und daher $m(\alpha_E(\widetilde{Q})) = c(E) \cdot m(\alpha(\widetilde{Q}))$. Da α die affine Abbildung (3) ist, gilt weiter $m(\alpha(\widetilde{Q})) = m(\widetilde{Q}) \cdot D(\mathfrak{y}_0)$. Wegen der Stetigkeit von $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$[10]) ist $m(\widetilde{Q}) \cdot D(\mathfrak{y}_0) = I(\widetilde{Q}) + \varkappa \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\varkappa| < \varepsilon_2$ für hinreichend kleines d. Hieraus und aus (6) folgt, wenn man ε_1 und damit ε_2 hinreichend klein wählt, sofort die Behauptung (2).

Zweiter Fall: $\dim T_E < k$. Dann sind zwei Unterfälle möglich: $\dim T < k$ und $\dim T = k$. Der erste Unterfall ist gleichbedeutend mit $D(\mathfrak{y}_0) = 0$, woraus wegen der Stetigkeit von $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ die Gleichung $I(\widetilde{Q}) = \delta_1 \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes hinreichend kleine d folgt; hieraus ergibt sich (1) wegen $m(Q_T) = 0$, während für (2) noch $m(Q_E) = \delta_2 \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ zu beweisen ist. Der zweite Unterfall ist, weil dann $E \neq T$ ist,

[12]) Aus (*) folgt $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'' = (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}'') \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}'')}{\partial \mathfrak{y}} + \mathfrak{d} \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''|$ mit $|\mathfrak{d}| < \varepsilon_1$, aus (3) folgt $\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}'' = (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}'') \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}$. Also ist $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'' = (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}'') + \mathfrak{d} \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| + (\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}'') \cdot \left(\frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}'')}{\partial \mathfrak{y}} - \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}\right)$. Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \mathfrak{y}}$ folgt hieraus $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}'' = (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z}'') + \mathfrak{e} \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''|$ mit $|\mathfrak{e}| < \varepsilon_1$ für hinreichend nahe bei $\mathfrak{y}_0$ gelegene Punkte $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}''$ aus $\widetilde{P}$. Und dies ergibt durch Projektion in E schließlich $\mathfrak{x}'_E - \mathfrak{x}''_E = (\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E) + \mathfrak{e}_E \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''|$ mit $|\mathfrak{e}_E| < \varepsilon_1$, woraus (4) folgt.

für (1) bedeutungslos. während (2) wegen $c(E) = 0$ in $m(Q_E) = \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ übergeht. Wir haben also, wenn wir ε statt $\frac{\varepsilon}{2}$ schreiben, unter der Voraussetzung $\dim T_E < k$ insgesamt nur zu zeigen:

(7) $\quad m(Q_E) = \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta| < \varepsilon$ für hinreichend kleines d.

T_E ist eine i-dimensionale Teilebene E_i von E, wobei $i = \dim T_E$, also $i < k$ ist. Zum Beweis von (7) wählen wir im R_n ein im allgemeinen schiefwinkliges Koordinatensystem $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ so, daß erstens E_i die Gleichungen $\bar{x}_{i+1} = \cdots = \bar{x}_n = 0$ und E die Gleichungen $\bar{x}_{k+1} = \cdots = \bar{x}_n = 0$ hat, zweitens für $j = i+1, \ldots, n$ die $\bar{x}_j$-Achse zu E_i senkrecht ist und drittens die affine Abbildung $\alpha_E = \pi_E \alpha$ in der Form

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= \lambda_j y_j \qquad (j = 1, \ldots, i) \quad (\lambda_j \neq 0) \\ \bar{x}_j &= 0 \qquad\quad (j = i+1, \ldots, n) \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Für beliebiges $\varrho > 0$ sei nun $\mathfrak{z}_\varrho = \beta_\varrho(\mathfrak{y})$ die nicht ausgeartete, affine Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= \lambda_j y_j \qquad (j = 1, \ldots, i) \\ \bar{x}_j &= \varrho y_j \qquad (j = i+1, \ldots, k) \\ \bar{x}_j &= 0 \qquad\quad (j = k+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Der Quotient $|\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| / |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho|$ hat eine endliche obere Schranke t_ϱ. Mithin gilt nach (4) für je zwei Punkte $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{y}''$ aus $\widetilde{P}$ mit Abständen $\leqq d(\varepsilon_1)$ von $\mathfrak{y}_0$:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{x}'_E - \mathfrak{x}''_E| &\leqq |\mathfrak{z}'_E - \mathfrak{z}''_E| + \varepsilon_1 \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| \leqq |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho| + \varepsilon_1 \cdot |\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}''| \\ &\leqq |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho| + t_\varrho \varepsilon_1 \cdot |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho| = (1 + t_\varrho \varepsilon_1) \cdot |\mathfrak{z}'_\varrho - \mathfrak{z}''_\varrho|. \end{aligned}$$

Also gilt:

(8) $\quad m(Q_E) \leqq (1 + t_\varrho \varepsilon_1)^k \cdot m(\beta_\varrho(\widetilde{Q}))$ für $d \leqq d(\varepsilon_1)$.

Ist nun $\varrho_0 > 0$ hinreichend klein, so gilt $m(\beta_{\varrho_0}(\widetilde{N})) \leqq m(\widetilde{N})$ für jede Menge $\widetilde{N}$ des R_k. Weiter gilt $m(\beta_\varrho(\widetilde{N})) \leqq m(\beta_{\varrho_0}(\widetilde{N}))$ für jedes $\varrho < \varrho_0$. Wir setzen $t_{\varrho_0} = t$. Aus (8) folgt dann $m(Q_E) \leqq m(\beta_\varrho(\widetilde{Q})) + \iota \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\iota| < (1 + t\varepsilon_1)^k - 1 = \varepsilon_2$ für $\varrho < \varrho_0$ und $d < d(\varepsilon_1)$. Wegen $\lim_{\varrho \to 0} m(\beta_\varrho(\widetilde{Q})) = 0$ folgt hieraus weiter $m(Q_E) \leqq \iota \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\iota| < \varepsilon_2$ für $d < d(\varepsilon_1)$. Dies ergibt (7), wenn man ε_1 und damit ε_2 hinreichend klein wählt.

§ 3.

Beweis des Satzes 2.

3.1. Da das Integral $I(\widetilde{M})$ unverändert bleibt, wenn man den Raum R_k einer Ähnlichkeitstransformation unterwirft, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die [auf ganz R_k fortgesetzte[8])] Abbildung π als dehnungslos annehmen. Außerdem können wir $\widetilde{M}$ und M als beschränkt annehmen.

Es sei ein ε mit $0 < \varepsilon < 1$ gegeben. Nach bekannten Sätzen enthält dann $\widetilde{M}$ eine (in sich) kompakte Menge $\widetilde{P}$ mit

$$m(\widetilde{M} - \widetilde{P}) < \varepsilon, \tag{9}$$

auf welcher die Funktionen x_i gleichmäßig total differenzierbar sind[9]). Dann sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ und damit $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ stetig[10]).

Wegen der Dehnungslosigkeit der Abbildung π sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ auf $\widetilde{P}$ beschränkt. Also ist auch $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ beschränkt:

$$D(\mathfrak{y}) < s. \tag{10}$$

Hieraus und aus (9) folgt

$$I(\widetilde{M} - \widetilde{P}) < \varepsilon \cdot s. \tag{11}$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ folgt die Existenz eines $e > 0$ mit folgender Eigenschaft: für jede Lebesgue-meßbare Teilmenge $\widetilde{Q}$ von $\widetilde{P}$ mit einem Durchmesser $\leqq e$ ist

$$D(\mathfrak{y}) \cdot m(\widetilde{Q}) = I(\widetilde{Q}) + \eta \cdot m(\widetilde{Q}) \quad \text{mit} \quad |\eta| < \varepsilon. \tag{12}$$

Die vorstehenden Festsetzungen und Beziehungen gelten für die sämtlichen folgenden Nummern 3. 2 bis 3. 7.

Wir beweisen nun die Behauptung des Satzes 2 nacheinander für die einzelnen Maßbegriffe.

3. 2. Die k-dimensionalen Kolmogoroff-Maße μ_K im R_n[7]) genügen dem Satz 2. wie von A. Kolmogoroff selbst bewiesen wurde[1]). Also gilt:

$$\mu_K(M) = I(\widetilde{M}). \tag{13}$$

3. 3. Das k-dimensionale Hausdorff-Maß μ_H im R_n[7]) ist ein Kolmogoroff-Maß. Denn es sind die folgenden vier Axiome erfüllt, durch welche die Kolmogoroff-Maße definiert sind; dabei seien A bzw. A_i sämtlich analytische Mengen. α) Aus $A \subset \sum A_i$ folgt $\mu_H(A) \leqq \sum \mu_H(A_i)$. Dies folgt unmittelbar aus der Definition von μ_H. — β) Aus $A_i \subset A$ und $A_j A_h = 0$ für $j \neq h$ folgt $\sum \mu_H(A_i) \leqq \mu_H(A)$. Es gibt wegen $A_1 A_2 = 0$ zwei Borelsche Mengen $B_1 \supset A_1$ und $B_2 \supset A_2$ mit $B_1 B_2 = 0$[13]). Die Menge B_1 ist meßbar bzgl. μ_H, da μ_H ein äußeres Maß im Sinne von C. Carathéodory ist[14]). Also ist $\mu_H(A_1 + A_2) = \mu_H((A_1 + A_2) \cdot B_1) + \mu_H((A_1 + A_2) - B_1) = \mu_H(A_1) + \mu_H(A_2)$. Analog zeigt man durch vollständige Induktion, daß für jedes natürliche i die Gleichung $\mu_H(A_1 + \cdots + A_i) = \mu_H(A_1) + \cdots + \mu_H(A_i)$ gilt. Wegen $A_1 + \cdots + A_i \subset A$ ist $\mu_H(A_1 + \cdots + A_i) \leqq \mu_H(A)$. Also folgt $\mu_H(A_1) + \cdots + \mu_H(A_i) \leqq \mu_H(A)$. Dies gilt für jedes i. Hieraus folgt β).

---

[13]) Vgl. z. B. H. Hahn, a. a. O.[5]), S. 369.

[14]) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Berlin 1918. S. 238.

— γ) Ist A ein dehnungsloses Bild von A', so ist $\mu_H(A) \leqq \mu_H(A')$. Denn für jede Teilmenge C' von A' ist der Radius der Pferchkugel (d. h. der kleinsten C' enthaltenden n-dimensionalen, abgeschlossenen Kugel) nicht größer als der Radius der Pferchkugel der Bildmenge C von C'[8]). — δ) Für den k-dimensionalen Einheitswürfel W ist $\mu_H(W) = 1$. Denn für jede Menge M des E_k ist $\mu_H(M) = m(M)$.

Hiernach folgt aus (13) als Spezialfall:

$$\mu_H(M) = I(\widetilde{M}). \tag{14}$$

3. 4. Das k-dimensionale Carathéodory-Maß μ_C und das k-dimensionale Groß-Maß μ_G im R_n[7]). Zunächst ist

$$\mu_C(L) \leqq \mu_H(L) \text{ für jede Menge } L \text{ des } R_n, \tag{15}$$

da bei der Definition von μ_H weniger Mengen (nämlich nur Kugeln) für die Überdeckung von L zugelassen sind als bei der Definition von μ_C. Weiter gilt

$$\mu_G(L) \leqq \mu_C(L), \tag{16}$$

wie aus der Definition von μ_G auf Grund der Tatsache folgt, daß für jede Teilmenge L' von L und die Projektion L'_E von L' in eine k-dimensionale Ebene E die Ungleichung $m(L'_E) = \mu_C(L'_E) \leqq \mu_C(L')$ gilt.

Aus (14) bis (16) folgt

$$\mu_G(M) \leqq \mu_C(M) \leqq I(\widetilde{M}). \tag{17}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung bemerken wir zunächst:

$$\mu_G(M - P) < \varepsilon. \tag{18}$$

Denn ist L eine beliebige Teilmenge von $M - P$, $\widetilde{L}$ das π-Urbild von L in $\widetilde{M} - \widetilde{P}$ und L_E die Projektion von L in eine k-dimensionale Ebene E, so ist L_E ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{L}$ und daher $m(L_E) \leqq m(\widetilde{L})$ [1]); hieraus folgt (18) auf Grund von (9).

Nach unserem Hilfssatz und dem Überdeckungssatz von Vitali existieren endlich oder abzählbar unendlich viele Kugeln $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2, \ldots$ im R_k, deren Mittelpunkte $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ in $\widetilde{P}$ liegen, so daß, wenn wir $\widetilde{K}_i \widetilde{P} = \widetilde{Q}_i, \pi(\widetilde{Q}_i) = Q_i$ setzen und mit T_i die Tangentialebene im Punkte $\mathfrak{x}_i = \pi(\mathfrak{y}_i)$ bezeichnen, folgendes gilt:

$$\widetilde{Q}_i \cdot \widetilde{Q}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j; \tag{19}$$

$$\widetilde{P} = \Sigma \widetilde{Q}_i + \widetilde{N} \quad \text{mit } m(\widetilde{N}) = 0; \tag{20}$$

$$m((Q_i)_{T_i}) = I(\widetilde{Q}_i) + \delta_i \cdot m(\widetilde{Q}_i), \quad |\delta_i| \leqq \varepsilon. \tag{21}$$

Hieraus folgt durch Addition

$$\sum_i m((Q_i)_{T_i}) = I(\widetilde{P}) + \delta \cdot m(\widetilde{P}), \quad |\delta| \leqq \varepsilon.$$

Da $(Q_i)_{T_i}$ die Projektion von Q_i in T_i ist, gilt $m((Q_i)_{T_i}) \leqq \mu_G(Q_i)$. Da $Q_i \subset P$ und $Q_i \cdot Q_j = 0$ gilt [letzteres wegen (19) und der Eineindeutigkeit der Abbildung π], so ist $\sum \mu_G(Q_i) \leqq \mu_G(P)$. Also ist

$$I(\widetilde{P}) + \delta \cdot m(\widetilde{P}) \leqq \mu_G(P).$$

Weil ε beliebig klein wählbar ist, folgt wegen (11) $I(\widetilde{M}) \leqq \mu_G(M)$. Hieraus und (17) folgt:

$$\mu_G(M) = \mu_C(M) = I(\widetilde{M}). \tag{22}$$

3. 5. Das $(n-1)$-dimensionale Gillespie-Maß μ_{Gi} im R_n. Die Definition dieses Maßes lautet genau so wie die des $(n-1)$-dimensionalen Carathéodory-Maßes μ_C[7]), nur verwendet man an Stelle der $(n-1)$-dimensionalen Durchmesser $d^{(n-1)}(U_i)$ der überdeckenden konvexen Mengen U_i deren halbe $(n-1)$-dimensionale Oberflächen $\frac{1}{2} O(U_i)$.

Da stets $d^{(n-1)}(U_i) \leqq \frac{1}{2} O(U_i)$ ist, gilt wegen (22):

$$\mu_{Gi}(M) \geqq I(\widetilde{M}). \tag{23}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung sei n_0 ein beliebiger Punkt von $\widetilde{P}$ und $\mathfrak{x}_0$ sein Bild in P. Wegen der gleichmäßigen totalen Differenzierbarkeit der Abbildung $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ gilt, wenn wir wieder mit α die affine Abbildung $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_0 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}(\mathfrak{y}_0)}{\partial \mathfrak{y}}$ bezeichnen, für die Abstände $|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|$ der Bilder $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ und $\mathfrak{z} = \alpha(\mathfrak{y})$ der Punkte $\mathfrak{y}$ aus $\widetilde{P}$ die Beziehung $|\mathfrak{x}' - \mathfrak{z}| = o(|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0|)$[15]). Hieraus folgt: Ist $\widetilde{K} \subset R_{n-1}$ eine hinreichend kleine Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}_0$, a die obere Grenze der Abstände $|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|$ für alle Punkte $\mathfrak{y}$ aus $\widetilde{Q} = \widetilde{K}\,\widetilde{P}$ und U die abgeschlossene, konvexe Menge aller Punkte des R_k mit Abständen $\leqq a$ von dem Ellipsoid $\alpha(\widetilde{K})$, so hat U einen Durchmesser $< \varepsilon$, enthält das Bild $Q = \pi(\widetilde{Q})$ von $\widetilde{Q}$ und es besteht die Beziehung $\frac{1}{2} O(U) = m(\alpha(\widetilde{K})) + o(m(\widetilde{K}))$.

Also existieren nach dem Überdeckungssatz von Vitali endlich oder abzählbar unendlich viele, paarweise fremde Kugeln $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2, \ldots$ im R_{n-1} mit den Mittelpunkten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ in $\widetilde{P}$, so daß, wenn wir $\widetilde{K}_i \widetilde{P} = \widetilde{Q}_i$ und $\pi(\widetilde{Q}_i) = Q_i$ setzen und zu jedem Q_i wie vorhin eine konvexe Menge $U_i \supset Q_i$ mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ konstruieren, folgendes gilt:

$$\widetilde{Q}_i \widetilde{Q}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j; \tag{24}$$

$$\widetilde{P} = \sum \widetilde{Q}_i + \widetilde{N}, \quad m(\widetilde{N}) = 0; \tag{25}$$

$$\sum m(\widetilde{K}_i) \leqq m(\widetilde{P}) + \varepsilon; \tag{26}$$

$$\tfrac{1}{2} O(U_i) = m(\alpha(\widetilde{K}_i)) + \delta_i \cdot m(\widetilde{K}_i), \quad |\delta_i| < \varepsilon; \tag{27}$$

$$m(\widetilde{Q}_i) \cdot D(\mathfrak{y}_i) = I(\widetilde{Q}_i) + \delta_i \cdot m(\widetilde{Q}_i), \quad |\delta_i| < \varepsilon. \tag{28}$$

[Zu (28) beachte man, daß $D(\mathfrak{y})$ in $\widetilde{P}$ gleichmäßig stetig ist.]

[15]) Z. B. nach Anm. [10]), Gleichung (*), worin man $\mathfrak{x}'$ durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{x}_0$ ersetze.

Nach (26) und (27), sowie wegen $\widetilde{P} \subset \widetilde{M}$ ist

$$\sum \tfrac{1}{2} O(U_i) = \sum m\big(\alpha(\widetilde{K}_i)\big) + \delta \cdot \big(m(\widetilde{M}) + \varepsilon\big), \quad |\delta| < \varepsilon. \tag{29}$$

Weiter ist

$$m\big(\alpha(\widetilde{K}_i)\big) = m(\widetilde{K}_i) \cdot D(\mathfrak{y}_i),$$

also

$$\begin{aligned}\sum m\big(\alpha(\widetilde{K}_i)\big) &= \sum m(\widetilde{K}_i) \cdot D(\mathfrak{y}_i) \\ &= \sum m(\widetilde{Q}_i) \cdot D(\mathfrak{y}_i) + \varepsilon \cdot s \text{ wegen (10), (25) und (26)} \\ &= I(\widetilde{P}) + \eta \cdot m(\widetilde{P}) + \varepsilon \cdot s, \ |\eta| < \varepsilon \text{ wegen (24), (25) und (28)} \\ &= I(\widetilde{M}) + \bar{\eta} \cdot m(\widetilde{M}) + 2\,\varepsilon s, \ |\bar{\eta}| < \varepsilon \text{ wegen (11) und } \widetilde{P} \subset \widetilde{M}.\end{aligned}$$

Also ist wegen (29)

$$\sum \tfrac{1}{2} O(U_i) < I(\widetilde{M}) + (\delta + \bar{\eta}) \cdot m(\widetilde{M}) + (\delta + 2\,s) \cdot \varepsilon, \ |\delta| < \varepsilon, |\bar{\eta}| < \varepsilon. \tag{30}$$

Die Menge $\widetilde{M} - \sum \widetilde{Q}_i$ ist nach (9) und (25) eine Menge des R_{n-1} mit $m(\widetilde{M} - \sum \widetilde{Q}_i) < \varepsilon$. Also können wir sie überdecken durch abzählbar viele Kugeln $\widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2, \ldots$ mit Durchmessern $< \frac{\varepsilon}{2}$ und einem Gesamtinhalt $< \varepsilon$. Für jedes i ist dann wegen der Dehnungslosigkeit von π die Menge $\pi\big((\widetilde{M} - \sum \widetilde{Q}_i) \cdot \widetilde{L}_j\big)$ enthalten in einer Kugel V_j, deren Durchmesser höchstens doppelt so groß ist wie der Durchmesser von $\widetilde{L}_j$. Die Kugeln $V_1, V_2, \ldots$ überdecken die Menge $M - \sum Q_i$, haben Durchmesser $< \varepsilon$ und es gilt

$$\sum \tfrac{1}{2} O(V_i) < c \cdot \varepsilon, \tag{31}$$

wobei c eine von ε unabhängige Konstante ist.

Insgesamt überdecken die konvexen Mengen $U_1, U_2, \ldots$ und $V_1, V_2, \ldots$ mit Durchmessern $< \varepsilon$ die ganze Menge M. Da ε eine beliebig kleine positive Zahl ist, folgt aus (30) und (31) die Ungleichung $\mu_{Gi}(M) \leqq I(\widetilde{M})$. Zusammen mit (23) ergibt dies die Gleichung

$$\mu_{Gi}(M) = I(\widetilde{M}). \tag{32}$$

3. 6. Das k-dimensionale Favard-Maß μ_F im R_n. Wir geben zunächst seine

Definition. Die Dichte der durch die Gleichungen

$$x_\lambda = \sum_{\varkappa=k+1}^{n} q_{\lambda\varkappa} x_\varkappa + q_{\lambda, n+1} \qquad (\lambda = 1, \ldots, k) \tag{33}$$

gegebenen $(n-k)$-dimensionalen Ebenen E_{n-k} des R_n gegenüber Euklidischen Bewegungen ist

$$\dot{E}_{n-k} = |G_n G_n'|^{-\frac{n+1}{2}} \prod_{\lambda=1}^{k} \prod_{\varkappa=k+1}^{n} dq_{\lambda\varkappa} \prod_{\lambda=1}^{k} dq_{\lambda, n+1}, \tag{34}$$

wobei

$$G_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -q_{1,k+1} & \ldots & -q_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -q_{k,k+1} & \ldots & -q_{k,n} \end{pmatrix}$$

und G_n' die transponierte Matrix ist[16]). Es sei N eine beliebige Menge des R_n und $\mathfrak{N}$ die Menge aller zu N nicht fremden, $(n-k)$-dimensionalen Ebenen E_{n-k}[17]). Mit $z = z(E_{n-k}) \leqq \infty$ sei die Anzahl der Punkte des Durchschnitts $N \cdot E_{n-k}$ bezeichnet. Dann ist das k-dimensionale Favard-Maß

$$\mu_F(N) = \frac{1}{c} \int_{\mathfrak{N}} z(E_{n-k})\, \dot{E}_{n-k}, \tag{35}$$

vorausgesetzt, daß dieses Lebesgue-Integral existiert, d. h. einen bestimmten endlichen oder unendlichen Wert hat. Die Konstante c ist dabei so bestimmt, daß für den k-dimensionalen Einheitswürfel W des R_n gilt:

$$\mu_F(W) = 1. \tag{36}$$

Wir behaupten nun: *Für jede analytische Menge A des R_n existiert das Maß $\mu_F(A)$.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir natürlich A sofort als beschränkt annehmen. Es sei i eine natürliche Zahl. Dann genügt es zu zeigen, daß die Menge aller E_{n-k}, die mit A mindestens i Punkte gemein haben, analytisch und daher Lebesgue-meßbar ist in dem durch die $q_{i,z}$ parametrisierten Raum aller E_{n-k}. Mit $R_n(i)$ bezeichnen wir die Menge aller ungeordneten i-Tupel $s = (p_1, \ldots, p_i)$ von Punkten des R_n, die aber nicht paarweise verschieden zu sein brauchen. Als Abstand von $s = (p_1, \ldots, p_i)$ und $s' = (p_1', \ldots, p_i')$ definieren wir $\overline{ss'} = \operatorname{Min}(\overline{p_1 p_{j_1}'} + \cdots + \overline{p_i p_{j_i}'})$, wobei $j_1, \ldots, j_i$ alle Permutationen von $1, \ldots, i$ durchläuft[18]). Auf diese Weise wird $R_n(i)$ zu einem vollständigen metrischen Raum. $R_n(i)$ ist ein eindeutiges, stetiges Bild der i-ten topologischen Potenz $R_n \times \cdots \times R_n$ (Menge aller geordneten i-Tupel $\{p_1, \ldots, p_i\}$ von Punkten aus R_n), indem nämlich jedem geordneten i-Tupel $\{p_1, \ldots, p_i\}$ der Potenz das ungeordnete i-Tupel $(p_1, \ldots, p_i)$ zugeordnet wird. Die i-te Potenz $A \times \cdots \times A$ ist analytisch in $R_n \times \cdots \times R_n$, da A im R_n analytisch ist[19]). Also ist auch das Bild von $A \times \cdots \times A$, d. h. die Menge $A(i)$ aller ungeordneten i-Tupel von Punkten aus A analytisch in $R_n(i)$[20]). – Ist nun r eine nicht negative ganze Zahl $\leqq n-k$, so sei $B_r(i)$ die Menge aller $s = (p_1, \ldots, p_i)$ mit paarweise ver-

[16]) A. Müller, Dichten linearer Mannigfaltigkeiten im euklidischen und nichteuklidischen R_n. Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 118; W. Blaschke, Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n. Act. sci. et industr. **252**, Paris 1935.

[17]) Wir verabreden: Für jede Punktmenge $A, B, C, \ldots$ des R_n bezeichnen wir mit dem entsprechenden Frakturbuchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ die Menge aller zu $A, B, C, \ldots$ nicht fremden $(n-k)$-dimensionalen Ebenen des R_n (und nennen sie die zu $A, B, C, \ldots$ gehörige Menge von Ebenen E_{n-k}). Nur beim Buchstaben E bzw. $\mathfrak{E}$ weichen wir von dieser Verabredung ab.

[18]) $\overline{pq}$ ist der Abstand der Punkte p und q.

[19]) Vgl. z. B. H. Hahn, a. a. O. [5]), S. 351.

[20]) Vgl. z. B. H. Hahn, a. a. O. [5]), S. 349.

schiedenen $p_1, \ldots, p_i$, die in einer r-dimensionalen Ebene $E_r(p_1, \ldots, p_i)$, aber keiner niedriger dimensionalen Ebene des R_n liegen. Dann ist $N_r(i)$ eine Borelsche Menge in $R_n(i)$, also analytisch in $R_n(i)$. Mithin ist auch der Durchschnitt $A(i) \cdot B_r(i)$ analytisch in $R_n(i)$. Ordnen wir nun jedem i-Tupel $(p_1, \ldots, p_i)$ aus $A(i) \cdot B_r(i)$ die Ebene $E_r(p_1, \ldots, p_i)$ zu, so ist diese Abbildung eindeutig und stetig. Also ist die Menge $\mathfrak{E}_r$ aller dieser Ebenen $E_r(p_1, \ldots, p_i)$ analytisch im Raum aller r-dimensionalen Ebenen. Es sei nun $\mathfrak{E}_{n-k}$ die Menge aller $(n-k)$-dimensionalen Ebenen des R_n, welche Ebenen $E_r(p_1, \ldots, p_i)$ enthalten. Dann ist auch diese Menge $\mathfrak{E}_{n-k,r}$ analytisch im Raum aller $(n-k)$-dimensionalen Ebenen des R_n (man erzeuge $\mathfrak{E}_r$ durch ein monotones System kompakter Mengen $M_{n_1 \ldots n_j}$, was wegen der Beschränktheit von A möglich ist[5]), und bezeichne mit $N_{n_1 \ldots n_j}$ die Menge aller E_{n-k}, welche r-dimensionale Ebenen aus $M_{n_1 \ldots n_j}$ enthalten; diese kompakten Mengen $N_{n_1 \ldots n_j}$ erzeugen dann $\mathfrak{E}_{n-k,r}$). Also ist auch die Menge $\mathfrak{E}_{n-k,0} + \cdots + \mathfrak{E}_{n-k,n-k}$ analytisch im Raum aller $(n-k)$-dimensionalen Ebenen E_{n-k}. Diese Menge besteht aber aus allen E_{n-k}, welche mindestens i Punkte von A enthalten. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir geben nun eine weitere Darstellung des Maßes μ_F. Ist $\mathfrak{E}$ eine Menge von Ebenen E_{n-k}, die Lebesgue-meßbar ist im Raume aller E_{n-k}, so führen wir als Maß von $\mathfrak{E}$ ein die Zahl

$$\mu(\mathfrak{E}) = \frac{1}{c} \int_{\mathfrak{E}} \dot{E}_{n-k}. \tag{37}$$

Gegeben sei jetzt eine analytische Punktmenge A des R_n. Für eine positive Zahl ε stellen wir A dar als Summe endlich oder abzählbar vieler, paarweise fremder, nichtleerer analytischer Teilmengen A_i^ε $(i = 1, 2, \ldots)$ mit Durchmessern $< \varepsilon$. Wir behaupten dann die Gleichung

$$\mu_F(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_i \mu(\mathfrak{A}_i^\varepsilon), \tag{38}$$

wobei $\mathfrak{A}_i^\varepsilon$ die Menge aller zu A_i^ε nicht fremden E_{n-k} bedeutet. Zum Beweis bezeichnen wir für jede natürliche Zahl j mit $z^{(j)}(E_{n-k})$ die größte natürliche Zahl $z \leq \infty$ mit folgender Eigenschaft: in E_{n-k} sind z Punkte von A enthalten, die zu je zwei einen Abstand $\geqq j^{-1}$ haben (außer diesen z Punkten dürfen noch weitere Punkte von A in E_{n-k} liegen). Die Funktionenfolge $z^{(1)}(E_{n-k})$, $z^{(2)}(E_{n-k}), \ldots$ konvergiert monoton wachsend gegen $z(E_{n-k})$ (Anzahl aller Punkte von $A \cdot E_{n-k}$). Also gibt es für jede Zahl $a < \mu_F(A)$ ein natürliches j derart, daß

$$a < \frac{1}{c} \int_{\mathfrak{A}} z^{(j)}(E_{n-k})\, \dot{E}_{n-k} \leqq \mu_F(A). \tag{39}$$

Ist nun ε eine beliebige positive Zahl $< (2j)^{-1}$, so kommt jede Ebene E_{n-k} in mindestens $z^{(j)}(E_{n-k})$, jedoch in höchstens $z(E_{n-k})$ der Mengen $\mathfrak{A}_i^\varepsilon$ vor. Also ist

$$\frac{1}{c}\int_{\mathfrak{A}} z^{(j)}(E_{n-k})\dot{E}_{n-k} \leqq \sum_i \mu(\mathfrak{A}_i^\varepsilon) \leq \frac{1}{c}\int_{\mathfrak{A}} z(E_{n-k})\,\dot{E}_{n-k}.$$

also nach (39)

$$a < \sum \mu(\mathfrak{A}_i^\varepsilon) \leqq \mu_F(A).$$

Hieraus folgt (38).

Auch das Maß μ können wir, wenigstens für die zu Punktmengen $A \subset R_n$ gehörigen Mengen $\mathfrak{A}$ von Ebenen E_{n-k}[17]), noch anders schreiben. Ist E_{n-k} die $(n-k)$-dimensionale Ebene (33) des R_n, so sei E_k^0 die zu E_{n-k} senkrechte k-dimensionale Ebene durch den Koordinatensprung O. Diese Ebene E_k^0 hängt nur von den Parametern $q_{\lambda\varkappa}$ $(\lambda = 1, \ldots, k;\ \varkappa = k+1, \ldots, n)$ ab. Ordnen wir dem Schnittpunkt von E_{n-k} und E_k^0 die k-Zahlen $q_{1,n+1}, \ldots, q_{k,n+1}$ zu, so stellen diese Zahlen in E_k^0 affine Koordinaten dar. Also können wir die kinematische Punktdichte $\dot{\mathfrak{p}}$ in E_k^0 in der Form

$$\dot{\mathfrak{p}} = F(q_{1,k+1}, \ldots, q_{kn}) \prod_{\lambda=1}^{k} dq_{\lambda,n+1}$$

schreiben. Setzen wir

$$\left(F(q_{1,k+1}, \ldots, q_{kn})\right)^{-1} \cdot |G_n G_n'|^{-\frac{n+1}{2}} \prod_{\lambda=1}^{k} \prod_{\varkappa=k+1}^{n} dq_{\lambda\varkappa} = \dot{E}_k^0,$$

so ist

$$\dot{E}_{n-k} = \dot{\mathfrak{p}}\dot{E}_k^0. \tag{40}$$

Mit $\dot{E}_{n-k}$ und $\dot{\mathfrak{p}}$ ist auch $\dot{E}_k^0$ invariant bei Bewegungen, die den Ursprung festlassen; also ist $\dot{E}_k^0$ die Dichte der k-dimensionalen Ebenen E_k^0 durch den Ursprung.

Nun sei A eine Punktmenge des R_n und $\mathfrak{A}$ die zugehörige Menge von Ebenen E_{n-k}. Nach (40) können wir, wenn $A_{E_k^0}$ die Projektion von A in die Ebene E_k^0 und m das k-dimensionale Lebesguesche Maß in E_k^0 bedeutet, folgendermaßen schreiben:

$$\int_{\mathfrak{A}} \dot{E}_{n-k} = \int \Big(\int_{A_{E_k^0}} \dot{\mathfrak{p}} \Big)\, \dot{E}_k^0 = \int m(A_{E_k^0})\, \dot{E}_k^0,$$

wobei die auf $\dot{E}_k^0$ bezüglichen Integrale über alle k-dimensionalen Ebenen E_k^0 durch den Ursprung zu nehmen sind. Also ist nach (37):

$$\mu(\mathfrak{A}) = \frac{1}{c}\int m(A_{E_k^0})\,\dot{E}_k^0. \tag{41}$$

Wir wenden uns nun dem eigentlichen Beweis des Satzes 2 für das Favard-Maß μ_F zu. Es liege wieder die Sachlage der Nr. 3. 1 und des Hilfs-

satzes vor; dabei sei $\widetilde{Q}$ der Durchschnitt $\widetilde{K}\widetilde{P}$ von $\widetilde{P}$ mit einer abgeschlossenen Kugel $\widetilde{K}$ mit dem Radius d und dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}_0$. Wir behaupten:

(42) $\mu(\mathfrak{Q}) = I(\widetilde{Q}) + \delta \cdot m(\widetilde{Q})$ mit $|\delta| < \varepsilon$ für hinreichend kleines d.

Zum Beweis verwenden wir die Gleichung (41), worin wir aber zur Vereinfachung kurz E statt E_k^0 schreiben. Dann lautet diese Gleichung für $A = Q$:

$$\mu(\mathfrak{Q}) = \frac{1}{c}\int m(Q_E)\,\dot{E}, \tag{43}$$

wobei über die Menge aller k-dimensionalen Ebenen E durch den Ursprung integriert wird. Hieraus folgt (42) im Falle dim $T < k$, weil dann $J(\widetilde{Q}) = \delta_1 \cdot m(\widetilde{Q})$ und $m(Q_E) = \delta_2 \cdot m(\widetilde{Q})$ ist mit $|\delta_1| + |\delta_2| < \varepsilon$ für hinreichend kleines d (vgl. S. 751, 2. Fall). Nun sei dim $T = k$. Die Gleichung (2) von S. 750 lautet ausführlicher:

$$m(Q_E) = c(E) \cdot I(\widetilde{Q}) + \delta(d; E) \cdot m(\widetilde{Q}) \text{ mit } \lim_{d\to 0} \delta(d; E) = 0. \tag{44}$$

Hierdurch ist $\delta(d; E)$ eindeutig definiert, wenn $m(\widetilde{Q}) \neq 0$ ist; ist $m(\widetilde{Q}) = 0$, so ist auch $I(\widetilde{Q}) = 0$ und $m(Q_E) = 0$, letzteres weil Q_E ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{Q}$ ist; in diesem Fall setzen wir $\delta(d; E) = 0$.

Wir behaupten über $\delta(d; E)$ zweierlei. $\alpha)$ $\delta(d; E)$ ist als Funktion von E summierbar. Hierzu genügt es, zu zeigen, daß die Funktionen $c(E)$ und $m(Q_E)$ summierbar sind. Für $c(E)$ folgt dies aus der Stetigkeit und Beschränktheit. Da Q_E ein dehnungsbeschränktes Bild von Q ist, also $m(Q_E) \leqq m(\widetilde{Q}) < \infty$ ist, brauchen wir nur die Meßbarkeit von $m(Q_E)$ zu zeigen. Mit $\widetilde{P}$ und $\widetilde{K}$ ist auch $\widetilde{Q} = \widetilde{K}\widetilde{P}$ und damit $Q = \pi(\widetilde{Q})$ kompakt. Also existiert für jedes natürliche j eine Q enthaltende Summe K^j endlich vieler, zu Q nicht fremder Kugeln des R_n mit Durchmessern $< j^{-1}$ derart, daß $K^1 \supset K^2 \supset \cdots$ gilt. Dann ist $K^1 \cdot K^2 \ldots = Q$. $K_E^1 \supset K_E^2 \supset \cdots$ und $K_E^1 \cdot K_E^2 \cdots = Q_E$, somit $m(K_E^1) \geqq (K_E^2) \geqq \cdots$ und $\lim m(K_E^i) = m(Q_E)$. Nun ist $m(K_E^i)$ stetig. Also ist $m(Q_E)$ meßbar. $\beta)$ Es ist $|\delta(d; E)| \leqq 1 + s$. Denn da Q_E ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{Q}$ ist, also $m(Q_E) \leq m(\widetilde{Q})$ gilt, da weiter $c(E) \leqq 1$ ist und $I(\widetilde{Q}) \leqq m(\widetilde{Q}) \cdot s$ ist wegen (10), so folgt $|m(Q_E) - c(E) \cdot I(\widetilde{Q})| \leq m(\widetilde{Q}) + m(\widetilde{Q}) \cdot s$, woraus sich $\beta)$ ergibt.

Aus $\alpha)$ und $\beta)$ folgt, daß wir in (44) unter dem Limeszeichen integrieren können[21]), d. h. daß, wenn wir $\int c(E)\,\dot{E} = e$ und $\int \delta(d; E)\,\dot{E} = \delta(d)$ setzen,

$$\int m(Q_E)\,\dot{E} = e \cdot I(\widetilde{Q}) + \delta(d) \cdot m(\widetilde{Q}) \text{ mit } \lim_{d\to 0} \delta(d) = 0,$$

also

$$\frac{1}{e}\int m(Q_E)\,\dot{E} = I(\widetilde{Q}) + \delta \cdot m(\widetilde{Q}) \text{ mit } |\delta| < \varepsilon \text{ für hinreichend kleines } d \tag{45}$$

[21]) A. a. O. [14]), S. 444.

gilt. Nun ist, wenn W ein Einheitswürfel $\subset T$ ist, $c(E) = m(W_E)$ nach Definition von $c(E)$ auf S. 750. Nach (41), worin wir $E_k^0 = E$ setzen, ist also $e = c\mu(\mathfrak{W})$, nach (37) mithin $e = \int_{\mathfrak{W}} \dot{E}_{n-k}$. Da jede Ebene E_{n-k}, außer derjenigen einer Menge mit dem Maße $\mu = 0$, mit W genau einen Punkt gemein hat, ist $\frac{1}{c}\int_{\mathfrak{W}} \dot{E}_{n-k} \quad \mu_F(W) = 1$. Also ist $e = c$. Mithin ist (45) wegen (43) mit (42) äquivalent und damit (42) bewiesen.

Nach (42) und dem Überdeckungssatz von Vitali existieren im R_k endlich oder abzählbar viele abgeschlossene Kugeln $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2, \ldots$, deren Durchmesser beliebig klein und deren Mittelpunkte $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ in $\widetilde{P}$ enthalten sind, derart, daß gilt:

$$\widetilde{Q}_i \widetilde{Q}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j; \tag{46}$$

$$\widetilde{P} = \sum_i{}' \widetilde{Q}_i + \widetilde{N}, \quad m(\widetilde{N}) = 0; \tag{47}$$

$$\mu(\mathfrak{Q}_i) = I(\widetilde{Q}_i) + \delta_i \cdot m(\widetilde{Q}_i), \quad |\delta_i| < \varepsilon. \tag{48}$$

Aus (46) bis (48) folgt

$$\sum_i \mu(\mathfrak{Q}_i) = I(\widetilde{P}) + \delta \cdot m(\widetilde{P}), \quad |\delta| < \varepsilon. \tag{49}$$

Da die Abbildung π eineindeutig ist, sind die Mengen $Q_i = \pi(\widetilde{Q}_i)$ und $N = \pi(\widetilde{N})$ paarweise fremd. Außerdem ist $P = \sum_i Q_i + N$. Schließlich ist $\mu(\mathfrak{N}) = 0$, wie aus (41) auf Grund der Tatsache folgt, daß wegen der Dehnungslosigkeit von π die Projektionen $N_{E_k^0}$ dehnungslose Bilder von $\widetilde{N}$ mit $m(\widetilde{N}) = 0$ sind und für sie daher $m(N_{E_k^0}) = 0$ gilt. Also ist wegen (38)

$$\mu_F(P) = \sum_i \mu(\mathfrak{Q}_i) + \delta' \cdot m(\widetilde{P}), \quad |\delta'| < \varepsilon,$$

falls die Durchmesser der Kugeln $\widetilde{K}_i$ und damit die der Mengen $Q_i = \pi(\widetilde{K}_i \widetilde{P})$ hinreichend klein sind, was wir, wie vorhin bereits bemerkt, annehmen können. Nach (49) ist also

$$\mu_F(P) = I(\widetilde{P}) + \zeta \cdot m(\widetilde{P}), \quad |\zeta| < 2\,\varepsilon. \tag{50}$$

Analog wie vorhin $\mu(\mathfrak{N}) = 0$ aus $m(\widetilde{N}) = 0$ folgt mit Hilfe von (38) und (41) aus (9) die Ungleichung $\mu_F(M - P) \leqq m(\widetilde{M} - \widetilde{P}) \cdot \frac{1}{c}\int \dot{E}_k^0 \leqq \varepsilon \cdot a$, wobei wir das über alle E_k^0 durch den Ursprung genommene Integral $\frac{1}{c}\int \dot{E}_k^0 = a$ gesetzt haben. Hieraus, (50) und (11), folgt

$$\mu_F(M) = I(\widetilde{M}) + \eta \cdot \big(m(\widetilde{M}) + a + s\big), \quad |\eta| < 2\,\varepsilon.$$

Da ε beliebig positiv ist, folgt schließlich

$$\mu_F(M) = I(\widetilde{M}). \tag{51}$$

3. 7. Das k-dimensionale Janzen-Maß μ_J im R_n. Definition. Für jedes $d_\varkappa$ einer Nullfolge $\{d_\varkappa\}$ positiver Zahlen liege eine Darstellung des R_n als Summe abzählbar vieler Quader $W_\varkappa^1, W_\varkappa^2, \ldots$ mit Durchmessern $< d_\varkappa$ vor; dabei sei über die Zugehörigkeit der Ecken, der offenen Kanten und der offenen Seitenflächen der Dimensionen $2, \ldots, n-1$ zu den Quadern so verfügt, daß die Quader paarweise fremd sind. Weiter seien für ein fest gewähltes, rechtwinkliges Koordinatensystem $E^1, \ldots, E^l$ die $l = \binom{n}{k}$ Koordinatenebenen der Dimension k. Wir setzen $W_\varkappa^i \cdot M = M_\varkappa^i$ und bezeichnen die Projektion von $M_\varkappa^i$ in die Ebene E^λ mit $M_{\varkappa E^\lambda}^i$. Schließlich setzen wir $\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(M_{\varkappa E^\lambda}^i))^2} = T_\varkappa(M)$. Dann ist $\mu_J(M) = \lim_{\varkappa \to \infty} T_\varkappa$. (Die Existenz dieses Limes wird sich für unser dehnungsloses Bild $M = \pi(\widetilde{M})$ ganz von selbst mit ergeben.)

Für jedes $\varkappa = 1, 2, \ldots$ und jedes $\lambda = 1, \ldots, l$ definieren wir eine Funktion $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ für alle Punkte $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{P}$ folgendermaßen. Wir setzen zunächst $W_\varkappa^i \cdot P = Q_\varkappa^i$ und $\pi^{-1}(Q_\varkappa^i) = \widetilde{Q}_\varkappa^i$. Dann liegt jeder Punkt $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{P}$ in genau einer der Mengen $\widetilde{Q}_\varkappa^1, \widetilde{Q}_\varkappa^2, \ldots$. Gilt nun für die den Punkt $\mathfrak{y}$ enthaltende Menge $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ die Gleichung $m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) = 0$, so setzen wir $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) = 0$. Ist aber $m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) \neq 0$, so definieren wir $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ durch die Gleichung

$$m(Q_{\varkappa E^\lambda}^i) = c(E^\lambda) \cdot I(\widetilde{Q}_\varkappa^i) + \delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) \cdot m(\widetilde{Q}_\varkappa^i), \tag{52}$$

wobei $c(E^\lambda)$ wie auf S. 750 mit Hilfe der Tangentialmannigfaltigkeit T an M im Punkte $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ definiert (also eine Funktion von $\mathfrak{y}$) ist. Dann gilt

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) = 0, \tag{53}$$

was im ersten Fall trivial ist und im zweiten Fall aus der Gleichung (2) (mit $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}$) wegen $\lim_{\varkappa \to \infty} d_\varkappa = 0$ folgt.

Wir wollen nun weiter zeigen, daß auf einer gewissen Teilmenge $\widetilde{P}'$ von $\widetilde{P}$ die Konvergenz (53) gleichmäßig ist. Hierzu benötigen wir die Lebesgue-Meßbarkeit von $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$, die wir zunächst beweisen wollen. Da die Mengen $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ Borelsche Mengen sind und $\widetilde{Q}_\varkappa^1 + \widetilde{Q}_\varkappa^2 + \cdots = \widetilde{P}$ ist, genügt es zu zeigen, daß $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ auf jeder Menge $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ meßbar ist. Im Falle $m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) = 0$ haben wir $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) = 0$ auf $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ gesetzt; in diesem Fall ist also $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ in trivialer Weise meßbar auf $\widetilde{Q}_\varkappa^i$. Nun sei $m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) > 0$. Wir bezeichnen vorübergehend mit $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ bzw. $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ die Menge der Punkte $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{Q}_\varkappa^i$, in denen $D(\mathfrak{y}) \neq 0$ (also > 0) bzw. $D(\mathfrak{y}) = 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von $D(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ [10]) ist $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ offen in $\widetilde{Q}_\varkappa^i$ und $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ abgeschlossen in $\widetilde{Q}_\varkappa^i$. Beide Mengen sind also Borelsche Mengen und wir brauchen nur noch die Meßbarkeit auf $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ und $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ zu zeigen. Für die Punkte $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ hängt die k-dimensionale Tangentialebene T an M in $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ stetig von $\mathfrak{y}$ ab wegen der Stetigkeit der partiellen

Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ auf $\widetilde{P}$; also hängt auch $c(E^\lambda)$ und damit $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ nach (52) stetig von $\mathfrak{y} \in \widetilde{Q}_\varkappa^{i(+)}$ ab. Für jeden Punkt $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ ist $c(E^\lambda) = \frac{1}{\sqrt{l}}$ nach S. 750, also $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ nach (52) konstant auf $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$ und daher meßbar auf $\widetilde{Q}_\varkappa^{i(0)}$.

Aus (53) und der Meßbarkeit der Funktionen $\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})$ auf $\widetilde{P}$ folgt die Existenz einer meßbaren Teilmenge $\widetilde{P}'$ von $\widetilde{P}$ mit

$$m(\widetilde{P} - \widetilde{P}') < \varepsilon \tag{54}$$

derart, daß

$$\lim_{\varkappa \to \infty} \delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}) = 0 \quad \text{gleichmäßig auf } \widetilde{P}' \tag{55}$$

gilt [22]). Dann existiert ein $\varkappa_0$ derart, daß für alle $\varkappa > \varkappa_0$, alle $\lambda = 1, \ldots, l$ und alle Quader $W_\varkappa^i$, welche mindestens einen Punkt $\mathfrak{x} = \pi(\mathfrak{y})$ aus $P' = \pi(\widetilde{P}')$ enthalten, die Gleichung (52) gilt mit $|\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y})| < \varepsilon$. Aus der letzten Ungleichung folgt $\sum_{\lambda=1}^{l} (\delta_\varkappa^{(\lambda)}(\mathfrak{y}))^2 < \varepsilon^2 l$. Außerdem ist $(c(E^1))^2 + \cdots + (c(E^l))^2 = 1$ [23]). Also gilt [24])

$$\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(Q_{\varkappa E^\lambda}^i))^2} = I(\widetilde{Q}_\varkappa^i) + \delta_\varkappa^i \cdot m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) \quad \text{mit} \quad |\delta_\varkappa^i| < \varepsilon \sqrt{l}$$

für alle $\varkappa > \varkappa_0$ und alle zu $\widetilde{P}' = \pi(P')$ nicht fremden $W_\varkappa^i$. Also gilt

$$\sum_i{}' \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(Q_{\varkappa E^\lambda}^i))^2} = \sum_i{}' I(\widetilde{Q}_\varkappa^i) + \delta_\varkappa' \cdot m(\widetilde{M}) \quad \text{mit} \quad |\delta_\varkappa'| \leqq \varepsilon \sqrt{l} \text{ [25])} \tag{56}$$

für jedes $\varkappa > \varkappa_0$, wobei summiert wird über alle i, für welche $W_\varkappa^i$ zu P' nicht fremd ist.

Die über die restlichen i genommene Summe $\sum_i{}'' Q_\varkappa^i$ ist in $P - P'$ und daher $\sum_i{}'' \widetilde{Q}_\varkappa^i$ in $\widetilde{P} - \widetilde{P}'$ enthalten. Wegen (54) ist daher $\sum_i{}'' m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) < \varepsilon$. Hieraus folgt wegen (10) erstens

$$\sum_i{}'' I(\widetilde{Q}_\varkappa^i) < \varepsilon \cdot s \tag{57}$$

[22]) A. a. O. [14]), S. 382.

[23]) O. Haupt-G. Aumann, a. a. O. [9]), S. 153; im Falle dim $T < k$ haben wir $c(E^\lambda) = \frac{1}{\sqrt{l}}$ gesetzt (S. 750)!

[24]) Auf Grund der bekannten Formel

$$\sqrt{(\sum_\nu a_1^{(\nu)})^2 + \cdots + (\sum_\nu a_r^{(\nu)})^2} \leqq \sum_\nu \sqrt{(a_1^{(\nu)})^2 + \cdots + (a_r^{(\nu)})^2}.$$

[25]) Wir haben die Zahl $\sum_i m(\widetilde{Q}_\varkappa^i) = m(\widetilde{P})$ durch die nicht kleinere Zahl $m(\widetilde{M})$ ersetzt.

und. da $Q^i_{\varkappa E^\lambda}$ ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{Q}^i_\varkappa$ ist, $\sum_i'' m(Q^i_{\varkappa E^\lambda}) < \varepsilon$ und somit zweitens

$$\sum_i'' \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(Q^i_{\varkappa E^\lambda}))^2} < \varepsilon \cdot l. \tag{58}$$

Aus (56) bis (58) folgt wegen $\sum_i \widetilde{Q}^i_\varkappa = \widetilde{P}$ für $\varkappa > \varkappa_0$

$$T_\varkappa(P) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} (m(Q^i_{\varkappa E^\lambda}))^2} - I(\widetilde{P}) + \delta_\varkappa \cdot (m(\widetilde{M}) + s + \sqrt{l}) \tag{59}$$

$$\text{mit } |\delta_\varkappa| < \varepsilon l.$$

Jetzt kommen wir rasch zum Ziel. Es gilt nämlich

$$T_\varkappa(P) \leqq T_\varkappa(M) \leqq T_\varkappa(P) + T_\varkappa(M - P)\,^{24}). \tag{60}$$

Nun ist $m(\widetilde{M} - \widetilde{P}) < \varepsilon$ nach (9). Hieraus folgt, daß die Projektionen der Durchschnitte der $W^1_\varkappa$, $W^2_\varkappa$, ... mit $M - P$ in die Ebene E^λ als dehnungslose Bilder paarweise fremder Teilmengen von $\widetilde{M} - \widetilde{P}$ eine Inhaltssumme $< \varepsilon$ haben. Also ist

$$T_\varkappa(M - P) < \varepsilon l \tag{61}$$

für jedes $\varkappa$. Aus (59) bis (61) und (11) folgt

$$T_\varkappa(M) = I(\widetilde{M}) + \varepsilon_\varkappa \cdot (m(\widetilde{M}) + 2\,s + 2\,l) \quad \text{mit} \quad |\varepsilon_\varkappa| < \varepsilon\, l$$

für $\varkappa > \varkappa_0$. Da ε eine beliebig kleine positive Zahl ist, folgt schließlich

$$\mu_J(M) = I(\widetilde{M}). \tag{62}$$

§ 4.

Beweis des Satzes 1 [26].

Es sei also jetzt $M \subset R_n$ ein eindeutiges (nicht notwendig umkehrbar eindeutiges), dehnungsbeschränktes Bild $\pi(\widetilde{M})$ einer analytischen Menge $\widetilde{M}$ des R_k. Die Menge $\widetilde{M}$ enthält eine monoton wachsende Folge $\widetilde{P}_1 \subset \widetilde{P}_2 \subset \cdots$ kompakter Mengen derart, daß

$$\widetilde{M} = \widetilde{P}_1 + \widetilde{P}_2 + \cdots + \widetilde{N} \quad \text{und} \quad m(\widetilde{N}) = 0 \tag{63}$$

ist [27]. Wir setzen $\pi(\widetilde{P}_j) = P_j$ und $\pi(\widetilde{N}) = N$.

Nun seien μ_i $(i = 1, 2)$ zwei der im Satz 1 genannten Maße. Wir behaupten die Gleichung

$$\mu_i(M) = \lim_{j \to \infty} \mu_i(P_j) \qquad (i = 1, 2). \tag{64}$$

[26]) Dieser Beweis ist eine Nachbildung des entsprechenden Beweises bei A. Kolmogoroff [1]).

[27]) A. a. O. [14]), S. 275.

Hierzu genügt es zu beweisen, daß

$$\mu_i(N) = 0 \tag{65}$$

ist. Diese Gleichung ergibt sich folgendermaßen. Ist μ_i ein KOLMOGOROFF-Maß μ_K, so folgt (65) aus $m(\widetilde{N}) = 0$ nach dem 3. Axiom von KOLMOGOROFF (Nr. 3. 3), da $N = \pi(\widetilde{N})$ ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{N}$ ist. Nun sei μ_i das HAUSDORFF-Maß μ_H; wegen $m(\widetilde{N}) = 0$ kann $\widetilde{N}$ überdeckt werden durch höchstens abzählbar viele Kugeln $K_1, K_2, \ldots$ des R_k mit Durchmessern $< \varepsilon$ und einer Inhaltssumme $< \varepsilon$; da N ein dehnungsloses Bild von $\widetilde{N}$ ist, kann N überdeckt werden durch gleich viele Kugeln $H_1, H_2, \ldots$ des R_n derart, daß der Durchmesser von H_r höchstens doppelt so groß ist wie der von K_r $(r = 1, 2, \ldots)$; hieraus folgt (65) für μ_H. Weiter folgt (65) für $\mu_i = \mu_C$ und $\mu_i = \mu_G$, da $\mu_G \leqq \mu_C \leqq \mu_H$ ist für jede Menge (Nr. 3. 4). Aus $\mu_H(N) = 0$ ergibt sich außerdem die Gleichung $\mu_{Gi}(N) = 0$, also (65) für $\mu_i = \mu_{Gi}$, auf Grund der aus der Definition von μ_H und μ_{Gi} unmittelbar folgenden Tatsache, daß für jede Menge L des R_n zwischen dem $(n-1)$-dimensionalen GILLESPIE-Maß $\mu_{Gi}(L)$ und dem $(n-1)$-dimensionalen HAUSDORFF-Maß $\mu_H(L)$ die Ungleichung $\mu_{Gi}(L) \leqq c_n \cdot \mu_H(L)$ gilt, wobei c_n der Quotient der halben Oberfläche der Einheitskugel im R_n und dem Inhalt der Einheitskugel im R_{n-1} ist. Schließlich folgt (65) für $\mu_i = \mu_F$ und $\mu_i = \mu_J$ aus der Tatsache, daß für jede Teilmenge N' von N die Projektion von N' in eine k-dimensionale Teilebene E des R_n ein dehnungsloses Bild $\pi_E \pi(\widetilde{N}')$ einer Teilmenge $\widetilde{N}'$ von $\widetilde{N}$ ist und daher den LEBESGUE-Inhalt 0 hat [für μ_F beachte man hierzu (38) und (41)].

Nun existiert für jedes natürliche j eine analytische Teilmenge $\widetilde{M}_j$ von $\widetilde{P}_j$ derart, daß π auf $\widetilde{M}_j$ eineindeutig ist und für das Bild $M_j = \pi(\widetilde{M}_j)$ die Gleichung $M_j = P_j$ gilt[1]). Nach (65) ist also

$$\mu_i(M_j) = \lim_{j \to \infty} \mu_i(M_j). \tag{66}$$

Nach Satz 2 ist $\mu_1(M_j) = \mu_2(M_j)$ für $j = 1, 2, \ldots$. Nach (66) ist also

$$\mu_1(M) = \mu_2(M).$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 5.

Beweis des Satzes 3.

5. 1. Das k-dimensionale Flächenmaß μ_L von H. LEBESGUE im R_n[28]). Definition. Es sei $F = \pi(\widetilde{F})$ eine stetige, k-dimensionale Fläche im R_n (§ 1). Für jedes natürliche j liege eine stetige, k-dimensionale Fläche $F^j = \pi^j(\widetilde{F})$ im R_n vor derart, daß die Abbildung π^j auf dem Einheitswürfel $\widetilde{F}$

[28]) H. LEBESGUE, Intégrale, aire, longueur. Annali di matematica (3) 7 (1902). S. 231—359.

des R_k stückweise affin ist, d. h. daß $\widetilde{F}$ als Summe endlich vieler Simplexe Δ^{jh} $(h = 1, 2, \ldots)$ darstellbar ist, auf denen die Abbildung π^j affin ist. Die Folge $\{F^j\}$ dieser simplizialen Flächen konvergiere gegen F, d. h. ist δ_j die obere Grenze der Abstände $\overline{\pi(\mathfrak{y})\,\pi^j(\mathfrak{y})}$ für alle Punkte $\mathfrak{y}$ von $\widetilde{F}$, so gilt $\lim_{j\to 0} \delta_j = 0$. Es sei nun $m(F^j)$ die Summe der k-dimensionalen, elementargeometrischen Inhalte der höchstens k-dimensionalen Simplexe $\pi^j(\Delta^{jh})$ $(h = 1, 2, \ldots)$ und $\underline{m}\{F^j\} \quad \lim_{j\to\infty} m(F^j)$ gesetzt. Dann ist die (eventuell unendliche) untere Grenze der Zahlen $\underline{m}\{F^j\}$ für alle Folgen $\{F^j\}$ der genannten Art das k-dimensionale Flächenmaß $\mu_L(F)$ von Lebesgue.

Nun sei die Fläche F, d. h. also π, dehnungsbeschränkt. Wir wollen zunächst die Ungleichung $\mu_L(F) \geqq I(\widetilde{F})$ beweisen. Hierzu wählen wir eine positive Zahl ε. Wir werden nun endlich viele, die Fläche F in ihren Mittelpunkten berührende Parallelepipede $\alpha_1(\widetilde{W}_1), \ldots, \alpha_t(\widetilde{W}_t)$ konstruieren, deren Inhaltssumme $\geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4s + 1)$ ist und so daß folgendes gilt: Ist $\{F^j\}$ eine gegen F konvergierende Folge simplizialer Flächen, so enthält für jedes hinreichend große j die Fläche F^j paarweise fremde Flächenstücke $F_1^j, \ldots, F_t^j$ derart, daß bei Projektion von F_v^j in die $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ enthaltende k-dimensionale Ebene das ganze Parallelepiped $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ von der Projektion überdeckt wird. Hieraus folgt, daß der Inhalt von F^j sicher $\geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4s + 1)$ ist. Da hierbei ε beliebig klein ist, folgt $\underline{m}\{F^j\} \geqq I(\widetilde{F})$ und damit $\mu_L(F) \geqq I(\widetilde{F})$. — Wir gehen an die Durchführung.

Zu dem beliebig gewählten, positiven ε wählen wir in $\widetilde{F}$ (wie in Nr. 3. 1 in $\widetilde{M}$) eine kompakte Menge $\widetilde{P}$ derart, daß die Beziehungen (9) bis (12) mit $\widetilde{F}$ statt $\widetilde{M}$ gelten. Weiter sei $\widetilde{N}$ die nach § 1 meßbare Menge aller Punkte von $\widetilde{F}$, in denen $D(\mathfrak{y}) \neq 0$ ist. Dann ist $I(\widetilde{F}) \quad I(\widetilde{N})$. Die Menge $\widetilde{N}$ enthält eine kompakte, zur Begrenzung von $\widetilde{F}$ fremde Teilmenge $\widetilde{G}$ derart, daß $m(\widetilde{N} - \widetilde{G}) < \varepsilon$ ist [27]). Dann ist $I(\widetilde{N} - \widetilde{G}) < \varepsilon \cdot s$ [vgl. (10)]. Hieraus und aus (11) mit $\widetilde{M} = \widetilde{F}$ folgt

$$I(\widetilde{F} - \widetilde{P}\,\widetilde{G}) < 2\,\varepsilon s. \tag{67}$$

Nun sei $\mathfrak{y}_0$ ein Punkt von $\widetilde{P}\,\widetilde{G}$ und $\mathfrak{x}_0$ sein Bildpunkt. Wegen der totalen Differenzierbarkeit von π in $\mathfrak{x}_0$ wird die Abbildung π angenähert durch die affine Abbildung α:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{x}_0 + (\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0) \cdot \frac{\partial\, \mathfrak{x}_0(\mathfrak{y}_0)}{\partial\, \mathfrak{y}}$$

in dem Sinne, daß

$$|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}| = o(|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0|) \tag{68}$$

gilt (vgl. § 2). Ist nun $\widetilde{V}$ ein achsenparalleler, abgeschlossener Würfel des R_k mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{y}_0$ und einer Kantenlänge d_0, $\widetilde{W}$ ein ebensolcher Würfel

mit der Kantenlänge $\sqrt[k]{1-\varepsilon}\cdot d_0$, so sind $\alpha(\widetilde{V})$ und $\alpha(\widetilde{W})$ Parallelepipede der k-dimensionalen Tangentialebene T an F im Punkte x_0, von denen das zweite im ersten enthalten ist. Es sei $V = \tau(\widetilde{V})$. Aus (68) folgt dann, falls d_0 hinreichend klein ist:

(69) $\alpha(\widetilde{W})$ wird durch V_T mit dem Grade ± 1 überdeckt[29].

Also existieren nach dem Überdeckungssatz von Vitali: erstens endlich viele paarweise fremde achsenparallele, abgeschlossene Würfel $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_t \subset \widetilde{F}$, deren Mittelpunkte $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_t$ in $\widetilde{P}\,\widetilde{G}$ liegen und deren Durchmesser $d_1, \ldots, d_t < e$ sind[30]; zweitens zu den $\widetilde{V}_\sigma$ konzentrische, achsenparallele Würfel $\widetilde{W}_1, \ldots, \widetilde{W}_t$ mit den Durchmessern $\sqrt[k]{1-\varepsilon}\cdot d_1, \ldots, \sqrt[k]{1-\varepsilon}\cdot d_t$, derart, daß einerseits gilt:

(70) $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ wird durch $V_{\sigma T_\sigma}$ mit dem Grade ± 1 überdeckt $(\sigma = 1, \ldots, t)$

[wobei natürlich $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ die in der k-dimensionalen Tangentialebene T_σ an F in $x_\sigma = \tau(\mathfrak{y}_\sigma)$ enthaltene affine Näherung von $\tau(\widetilde{W}_\sigma)$ und $V_{\sigma T_\sigma}$ die Projektion von $V_\sigma = \tau(\widetilde{V}_\sigma)$ in die Tangentialebene T_σ ist] und andererseits $m(\widetilde{P}\,\widetilde{G} - \sum_{\sigma=1}^{t}\widetilde{V}_\sigma) < \varepsilon$. Aus der letzteren Ungleichung folgt, da die Kantenlängen von $\widetilde{W}_\sigma$ und $\widetilde{V}_\sigma$ sich wie $\sqrt[k]{1-\varepsilon} : 1$ verhalten und daher $m(\sum_\sigma \widetilde{V}_\sigma - \sum_\sigma \widetilde{W}_\sigma) < \varepsilon\cdot m(\sum \widetilde{V}_\sigma) < \varepsilon$[31]:

$$m(\widetilde{P}\,\widetilde{G} - \sum_{\sigma=1}^{t}\widetilde{W}_\sigma) < 2\,\varepsilon. \tag{71}$$

---

[29]) Es sei $f(\widetilde{V})$ ein in einer k-dimensionalen Ebene E des R_n enthaltenes eindeutiges, stetiges Bild eines k-dimensionalen Würfels $\widetilde{V}$ und p ein nicht im Bild $f(B(\widetilde{V}))$ der Begrenzung $B(\widetilde{V})$ von $\widetilde{V}$ enthaltener Punkt von E. Zur Definition des Grades von f in p sei τ eine Triangulierung des Inneren $\underline{\widetilde{V}}$ von $\widetilde{V}$, d. h. eine Darstellung von $\underline{\widetilde{V}}$ als Summe von abzählbar vielen abgeschlossenen k-dimensionalen Simplexen, die zu je zwei höchstens ein Randsimplex gemein haben, die sich nur in $B(\widetilde{V})$ häufen und deren Durchmesser gegen Null konvergieren. Es sei nun g eine auf $B(\widetilde{V})$ mit f identische, auf den Simplexen von τ affine Abbildung von $\widetilde{V}$ in E; indem wir die g-Bilder der Simplexecken in E ein wenig verrücken („in allgemeine Lage bringen"), können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Punkt p für kein Simplex von τ im g-Bild des Randes enthalten ist. Der (von g unabhängige) Grad der Abbildung f in p ist nun die Anzahl p enthaltenden g-Bilder von Simplexen von τ, wobei solch ein g-Bild positiv oder negativ zu zählen ist, je nachdem die durch g in diesem Bildsimplex induzierte Orientierung der Orientierung in E gleichgerichtet ist oder nicht. Vgl. z. B. P. Alexandroff und H. Hopf, Topologie I, Berlin 1935.

[30]) Die Definition von e befindet sich auf S. 753; man schreibe dort F statt M.

[31]) Man beachte, daß die $\widetilde{V}_\sigma$ paarweise fremd und im Einheitswürfel $\widetilde{F}$ enthalten sind.

Außerdem gilt wegen $\widetilde{W}_\sigma \subset \widetilde{F}$ und $\widetilde{W}_{\sigma'} \cdot \widetilde{W}_{\sigma''} = 0$ für $\sigma' \neq \sigma''$:

$$\sum_{\sigma=1}^{t} m(\widetilde{W}_\sigma) < 1. \tag{72}$$

Nun sei $\{F^j\}$ eine gegen die Fläche F konvergierende Folge von simplizialen Flächen $F^j \quad \pi^j(\widetilde{F})$ im Sinne der Definition von μ_L. Wir setzen $\pi^j(\widetilde{V}_\sigma) = F^j_\sigma$. Die t Flächen $F^j_1, \ldots, F^j_t$ sind in F^j enthalten und konvergieren gegen die Flächen $V_1, \ldots, V_t$. Wegen (70) existiert daher ein natürliches j_0 derart, daß $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ für jedes $j > j_0$ von der Projektion von F^j_σ in die Tangentialebene T_σ an die Fläche F im Punkte $\mathfrak{x}_\sigma = \pi(\mathfrak{y}_\sigma)$ überdeckt wird ($\sigma = 1, \ldots, t$). Also ist der elementargeometrische Inhalt $m(F^j_\sigma) \geqq m\big(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)\big)$ und daher $m(F^j) \geqq \sum m\big(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)\big) \geqq \sum m\big(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma \widetilde{P}\,\widetilde{G})\big) = \sum D(\mathfrak{y}_\sigma) \cdot m(\widetilde{W}_\sigma \widetilde{P}\,\widetilde{G})$. Da die Durchmesser der Würfel $\widetilde{W}_\sigma < e$ sind, folgt aus (12): $D(\mathfrak{y}_\sigma) \cdot m(\widetilde{W}_\sigma \widetilde{P}\,\widetilde{G}) = I(\widetilde{W}_\sigma \widetilde{P}\,\widetilde{G}) + \eta_\sigma m(\widetilde{W}_\sigma)$ mit $|\eta_\sigma| < \varepsilon$. Unter Berücksichtigung von (72), (71) und (67) folgt hieraus weiter $m(F^j) \geqq I(\sum \widetilde{W}_\sigma \widetilde{P}\,\widetilde{G}) - \varepsilon \geqq I(\widetilde{P}\,\widetilde{G}) - 2\,\varepsilon s - \varepsilon \geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4s + 1)$ und somit $\lim m(F^j) \geqq I(\widetilde{F})$, da ε beliebig klein gewählt werden kann und s fest ist (Nr. 3. 1). Da $\{F^j\}$ eine beliebige, gegen F konvergente Folge von simplizialen Flächen F^j ist, folgt nach Definition von μ_L schließlich $\mu_L(F) \geqq I(\widetilde{F})$.

Die umgekehrte Ungleichung $\mu_L(F) \leqq I(\widetilde{F})$ folgt daraus, daß Folgen $\{F^j\}$ simplizialer Flächen F^j mit $\lim m(F^j) = I(\widetilde{F})$ tatsächlich existieren[32]). Also ist[33])

$$\mu_L(F) = I(\widetilde{F})\,^{34}). \tag{73}$$

---

[32]) O. Haupt-G. Aumann, a. a. O. [9]), S. 160.

[33]) Für die Richtigkeit dieser Gleichung ist es wesentlich, daß $\widetilde{F}$ ein Würfel ist oder allgemeiner ein abgeschlossenes Gebiet, deren Begrenzung den k-dimensionalen (äußeren) Inhalt Null hat. Ist nämlich $\widetilde{F} \doteq R_k$ ein topologisches Bild eines abgeschlossenen Würfels des R_k, für welches die Begrenzung einen positiven Lebesgueschen Inhalt hat und setzen wir π auf $\widetilde{F}$ gleich der Identität (also $\widetilde{F} = F$), so ist $\mu_L(F) = m(\underline{F})$ ($\underline{F}$ ist der offene Kern von F), also $\mu_L(F) < I(\widetilde{F}) = m(F)$. — Dasselbe gilt für das (für k-dimensionale topologische Flächen mit μ_L identische) Maß μ_M für k-dimensionale Mengen $M \subset R_n$ von K. Menger [Ergebnisse eines math. Kolloquiums, Heft 2 (1932), S. 10]: ist G_ε die untere Grenze der elementargeometrischen Inhalte der k-dimensionalen Polyeder (endliche Simplexsummen), in welche sich die k-dimensionale Menge M ε-deformieren läßt, so ist $\mu_M(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon$. Die letzte Ungleichung, in welcher man μ_M statt μ_L schreiben kann, zeigt zugleich, daß die Sätze 1 und 2 für μ_M nicht gelten.

[34]) Z. von Geöcze [Math. und naturw. Berichte aus Ungarn **26** (1908), S. 1—88] hat für Flächen sechs Maße $T_1 - T_6$ mit $\mu_L = T_1 = T_2 \leqq T_3 \leqq T_4 \leqq T_5 \leqq T_6$ definiert, die aus $\mu_L = T_1 = T_2$ durch einschränkende Voraussetzungen über die approximierenden Folgen $\{F^j\}$ (S. 766) hervorgehen. Für T_6 bestehen die Voraussetzungen darin, daß die Simplexecken der F^j in F liegen sollen, daß also die Simplexnetze F^j der Fläche F einbeschrieben sein sollen. Da für dehnungsbeschränkte topologische Flächen F einbeschriebene Simplexnetze F^j mit $\lim m(F^j) = I(\widetilde{F})$ existieren[32]), folgt $T_1(F) = \cdots = T_6(F) = I(\widetilde{F})$ für solche Flächen F.

5. 2. Das k-dimensionale Flächenmaß μ_P im R_n von G. Peano[35]). Definition. Der abgeschlossene Einheitswürfel $\widetilde{F}$ sei dargestellt als Summe $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_u$ endlich vieler zu $\widetilde{F}$ homöomorpher Mengen $\widetilde{F}_\sigma$ mit der Eigenschaft, daß $m(\widetilde{F}_{\sigma'} \cdot \widetilde{F}_{\sigma''}) = 0$ ist für $\sigma' \neq \sigma''$[36]). Für gleichviele k-dimensionale Ebenen E_σ des R_n werden die u Projektionen $F_{\sigma E_\sigma}$ der Mengen $F_\sigma = \pi(\widetilde{F}_\sigma)$ in die Ebenen E_σ betrachtet. Dann ist $\mu_P(F) = \text{Supr.}\,(m(F_{1E_1}) + \cdots + m(F_{uE_u}))$ für alle Summendarstellungen $\widetilde{F} = \widetilde{F}_1 + \cdots + \widetilde{F}_u$ der genannten Art und alle k-dimensionalen Ebenen $E_1, \ldots, E_u$.

Wir behaupten zunächst die Ungleichung $\mu_P(F) \leqq I(\widetilde{F})$. In jedem $\widetilde{F}_\sigma$ ist eine analytische Menge $\widetilde{A}_\sigma$ enthalten, auf welcher die dehnungslose Abbildung π umkehrbar eindeutig und das Bild $\pi(\widetilde{A}_\sigma) = A_\sigma$ gleich F_σ ist[1]). Dann ist einerseits $m(F_{\sigma E_\sigma}) \leqq \mu_G(F_\sigma) = \mu_G(A_\sigma)$ für jede Ebene E_σ, da für jede Menge B des R_n die Ungleichung $m(B_E) \leqq \mu_G(B)$ gilt. Andererseits ist $\mu_G(A_\sigma) = I(\widetilde{A}_\sigma)$ nach Satz 2 und $I(\widetilde{A}_1) + \cdots + I(\widetilde{A}_u) \leqq I(\widetilde{F})$, da der Durchschnitt je zweier Mengen $\widetilde{A}_\sigma$ leer oder eine Lebesguesche Nullmenge ist. Also ist $m(F_{1E_1}) + \cdots + m(F_{uE_u}) \leqq I(\widetilde{F})$ und somit

$$\mu_P(F) \leqq I(\widetilde{F}). \tag{74}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung betrachten wir die Würfel $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_t$ der Nr. 5. 1 und fügen zu ihnen endlich viele weitere abgeschlossene Würfel $\widetilde{V}_{t+1}, \ldots, \widetilde{V}_u$ hinzu derart, daß $\widetilde{F} = \widetilde{V}_1 + \cdots + \widetilde{V}_u$ ist und die $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_u$ zu je zwei höchstens einen $(k-1)$-dimensionalen Durchschnitt haben. Aus (70) und der in Nr. 5. 1 bewiesenen Ungleichung $\sum_{\sigma=1}^{t} m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)) \geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4s+1)$ folgt $\sum_{\sigma=1}^{t} m(V_{\sigma T_\sigma}) \geqq I(\widetilde{F}) - \varepsilon \cdot (4s+1)$. Also ist $\mu_P(F) \geqq I(\widetilde{F})$. Dies zusammen mit (74) ergibt

$$\mu_P(F) = I(\widetilde{F}). \tag{75}$$

5. 3. Das erste k-dimensionale Flächenmaß μ'_R im R_n von T. Radó[35]). Definition. Im Einheitswürfel $\widetilde{F}$ des R_k sei ein System $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_t$ endlich vieler, paarweise fremder[37]), zu $\widetilde{F}$ homöomorpher Mengen

[35]) Nach T. Radó, Über das Flächenmaß rektifizierbarer Flächen. Math. Annalen **100** (1928), S. 444–479. In dieser Arbeit wird die Gleichung $\mu'_R(F) = \mu''_R(F) = I(\widetilde{F})$ für $n = 3$; $k = 2$ bewiesen.

[36]) Die Formulierung bei T. Radó[35]) lautet: „Die Fläche wird in endlich viele Flächenstücke zerlegt". Genaueres wird über die Zerlegung nicht gesagt.

[37]) T. Radó[35]) verlangt, daß die $F_1, \ldots, F_t$ „nicht übereinander greifen", ohne dies genauer zu definieren. Vielleicht kann man dies auch dahin interpretieren, daß die $F_1, \ldots, F_t$ paarweise keine inneren Punkte gemein haben dürfen (man muß dann allerdings wohl noch verlangen, daß die Durchschnitte $F_{\sigma'} \cdot F_{\sigma''}$ leer oder Lebesguesche Nullmengen sind). Unsere Überlegungen in Nr. 5. 3 und 5. 5 bleiben auch bei dieser Interpretation richtig.

gegeben. Für jede Menge $F_\sigma = \pi(\widetilde{F}_\sigma)$ und jede k-dimensionale Ebene E_σ des R_n sei $\mathfrak{K}(F_{\sigma E_\sigma})$ der Kern der Projektion $F_{\sigma E_\sigma}$ von F_σ in E_σ, d. h. die Menge aller Punkte p von E_σ mit folgender Eigenschaft: Zu p existiert eine positive Zahl $\delta(p)$, so daß p enthalten ist in der Projektion $F'_{\sigma E_\sigma}$ jeder stetigen Fläche $F'_\sigma = \pi'(\widetilde{F}_\sigma)$, für welche der Abstand $\overline{\pi(\mathfrak{y})\,\pi'(\mathfrak{y})} \leqq \delta(p)$ ist für jeden Punkt $\mathfrak{y}$ aus $\widetilde{F}_\sigma$. Dann ist $\mu'_R = \text{Supr.}\left(m(\mathfrak{K}(F_{1E_1})) + \cdots + m(\mathfrak{K}(F_{tE_t}))\right)$ für alle Systeme $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_t$ und alle Ebenen $E_1, \ldots, E_t$.

Man beweist die Ungleichung $\mu'_R(F) \leqq I(\widetilde{F})$ genau so wie (74); nur setzt man $m(\mathfrak{K}(F_{\sigma E_\sigma}))$ an Stelle von $m(F_{\sigma E_\sigma})$. Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung wählt man wieder die paarweise fremden Würfel $V_1, \ldots, V_t$ der Nr. 5.1. Aus (70) folgt, daß das Parallelepiped $\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)$ im Kern $\mathfrak{K}(V_{\sigma T_\sigma})$ der Projektion $V_{\sigma T_\sigma}$ von $V_\sigma = \pi(\widetilde{V}_\sigma)$ in die Tangentialebene T_σ enthalten ist. Hieraus folgt wie in Nr. 5.2 $\mu'_R(F) \geqq I(\widetilde{F})$. Also gilt

$$\mu'_R(F) = I(\widetilde{F}). \tag{76}$$

5.4. Ein k-dimensionales Flächenmaß μ_U im R_n mit uns unbekanntem Ursprung[35]). Definition. Im R_n liege ein festes, rechtwinkliges Koordinatensystem vor; es seien $E^1, \ldots, E^l$ die $l = \binom{k}{n}$ Koordinatenebenen der Dimension k. Es sei $\widetilde{F} = \widetilde{F}_1 + \cdots + \widetilde{F}_t$ wie in Nr. 5.2[36]). Es sei $m_{\sigma\lambda}$ der Lebesguesche Inhalt der Projektion $F_{\sigma E^\lambda}$ von F_σ in E^λ. Dann ist das Maß $\mu_U(F) = \text{Supr.} \sum_{\sigma=1}^{u} \sqrt{m_{\sigma 1}^2 + \cdots + m_{\sigma l}^2}$ für alle Darstellungen $F = \widetilde{F}_1 + \cdots + \widetilde{F}_u$.

Analog wie (74) beweist man jetzt $\mu_U(F) \leqq I(\widetilde{F})$, indem man statt wie in Nr. 5.2 die Ungleichung $m(F_{\sigma E_\sigma}) \leqq \mu_G(F_\sigma)$ jetzt die Ungleichung $\sqrt{m_{\sigma 1}^2 + \cdots + m_{\sigma l}^2} \leqq \mu_J(F_\sigma)$ benutzt, welche daraus folgt, daß für jede Quaderdarstellung (Nr. 3.7) $\sqrt{m_{\sigma 1}^2 + \cdots + m_{\sigma l}^2} \leqq T_\varkappa(F_\sigma)$ ist[24]). Also ist

$$\mu_U(F) \leqq I(\widetilde{F}). \tag{77}$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung bestätigt man zunächst genau wie (69) folgende schärfere Behauptung: Ist d_0 hinreichend klein, so wird die Projektion $(\alpha(\widetilde{W}))_{E^\lambda}$ durch V_{E^λ} mit dem Grade ± 1 überdeckt, falls E^λ auf der $\alpha(\widetilde{W})$ enthaltenden Tangentialebene T nicht senkrecht steht ($\lambda = 1, \ldots, l$). Entsprechend verschärft man (70). Nun wählen wir die Würfel $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_u$ wie in Nr. 5.2. Dann folgt aus der verschärften Beziehung (70), daß $(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))_{E^\lambda}$ im Kern $\mathfrak{K}(V_{\sigma E^\lambda})$ von $V_{\sigma E^\lambda}$ enthalten ist ($\sigma = 1, \ldots, t$), wenn E^λ zu T_σ nicht senkrecht ist; ist jedoch E^λ zu T_σ senkrecht, so ist $m\left((\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))_{E^\lambda}\right) = 0$. Mithin gilt $m(\mathfrak{K}(V_{\sigma L^\lambda})) \geqq m\left((\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))\right)_{E^\lambda} = c(E^\lambda) \cdot m(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma))$ für jedes $\sigma = 1, \ldots, t$

und jedes $\lambda = 1, \ldots, l$. Also ist $\sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} \left(m\left(\mathfrak{R}(V_{\sigma E^\lambda})\right)\right)^2} \geqq m\left(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)\right)$ [23]).

Hieraus folgt $\mu_U(F) \geqq \sum m\left(\alpha_\sigma(\widetilde{W}_\sigma)\right)$ und hieraus analog wie in Nr. 5. 3 jetzt die Ungleichung $\mu_U(F) \geqq I(\widetilde{F})$. Dies zusammen mit (77) ergibt

$$\mu_U(F) = I(\widetilde{F}). \tag{78}$$

5. 5. Das zweite k-dimensionale Flächenmaß μ_R'' im R_n von T. Radó [35]). Die Definition lautet genau so wie die für μ_U, nur verwendet man erstens Systeme $\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_t$ wie in Nr. 5. 3 [37]), und zweitens die Inhalte $m\left(\mathfrak{R}(F_{\sigma E^\lambda})\right)$ der Kerne an Stelle der Inhalte $m(F_{\sigma E^\lambda}) = m_{\sigma\lambda}$.

Wie in Nr. 5. 4 die Ungleichung (77), beweist man jetzt die Ungleichung $\mu''(F) \leqq I(\widetilde{F})$. Die umgekehrte Ungleichung beweist man genau wie die entsprechende Ungleichung in Nr. 5. 4, nur beschränkt man sich dabei auf die Würfel $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_t$ der Nr. 5. 1. Also gilt

$$\mu_R''(F) = I(\widetilde{F}). \tag{79}$$

(Eingegangen am 5. Juli 1942.)

Über die „Polynom-Kerne“ der linearen Integralgleichungen.

Von

Stefan Fenyö in Budapest, Ungarn.

Herr T. Satô [1]) hat in einer Arbeit das Eigenwertproblem der Kerne von der Form

$$Q(x, y) = K_n(x, y) + a_1 K_{n-1}(x, y) + \cdots + a_{n-1} K(x, y)$$

behandelt. Dabei sind die mit $K_n(x, y)$ iterierten Kerne von $K(x, y)$ im Bereiche

$$D : \begin{bmatrix} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1 \end{bmatrix}.$$

Im folgenden wollen wir den lösenden Kern von Q untersuchen. Die befolgte Methode ist geeignet, das Ergebnis von Herrn Satô in äußerst einfacher Weise abzuleiten. Deshalb wollen wir uns im ersten Teil unserer Arbeit mit den Eigenfunktionen von Q beschäftigen und im zweiten eine Formel für den lösenden Kern von Q angeben. Unsere Resultate sind Verallgemeinerungen wohlbekannter Sätze.

Wir wollen für jeden beliebigen stetigen Kern $K(x, y)$ die Funktionaloperation

$$\mathfrak{K} u = \int_0^1 K(x, y)\, u(y)\, dy$$

einführen. Entsprechend sei $\mathfrak{K}^n$ der zum Kern $K_n(x, y)$ gehörende Operator.

Falls $N(x, y)$ und $M(x, y)$ zwei beliebige, in D definierte stetige Kerne sind, und die ihnen entsprechenden Operatoren $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ ist gemäß dem Volterraschen Operatorenkalkül [2])

$$(a + b\,\mathfrak{N}) \cdot \mathfrak{M} = a\,\mathfrak{M} + b\,\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M},$$

a und b sind beliebige Konstanten, und dem Operator $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{M}$ entspricht der Kern $\int_0^1 N(x, t)\, M(t, y)\, dt$.

[1]) T. Satô, Proc. of the Phys. Math. Society of Japan (3) **23** (1941), S. 1.

[2]) V. Volterra, Atti d. Reale Acc. dei Lincei **20** (1911); J. Soula, L'équation intégrale de première espèce à limites fixes et les fonctions permutables à limites fixes. Paris 1936. S. 44.

1. Nun betrachten wir die homogene Integralgleichung

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 Q(x, y)\, \varphi(y)\, dy = 0. \tag{I}$$

Sie läßt sich in folgende Form setzen:

$$P(\mathfrak{K}) \cdot \varphi \equiv \left(\mathfrak{K}^n + a_1 \mathfrak{K}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathfrak{K} - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \varphi = 0.$$

Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x - \frac{1}{\lambda} = 0,$$

so ist unsere Gleichung

$$P(\mathfrak{K}) \cdot \varphi \equiv (\mathfrak{K} - r_1)(\mathfrak{K} - r_2) \ldots (\mathfrak{K} - r_n) \cdot \varphi = 0.$$

Setzt man

$$\varphi_k = (\mathfrak{K} - r_{k+1})(\mathfrak{K} - r_{k+2}) \ldots (\mathfrak{K} - r_n)\, \varphi; \quad \varphi_n \equiv \varphi; \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

so kann die Gleichung in der Gestalt

$$(\mathfrak{K} - r_1) \cdot \varphi_1 = 0$$

geschrieben werden. Ist $\frac{1}{r_1}$ kein Eigenwert von K, so besitzt diese Gleichung die einzige Lösung $\varphi_1 \equiv 0$. Dann ist aber

$$(\mathfrak{K} - r_2) \cdot \varphi_2 = \varphi_1 \equiv 0.$$

Diese Gleichung hat auch nur die triviale Lösung $\varphi_2 \equiv 0$, falls $\frac{1}{r_2}$ kein Eigenwert von K ist. Wird dieses Verfahren fortgesetzt, so ergibt sich, daß die Gleichung (I) nur die triviale Lösung $\varphi = 0$ besitzt, wenn keine der Zahlen $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ Eigenwert von $K(x, y)$ ist. λ kann also nur dann ein Eigenwert von Q sein, wenn mindestens eine der Zahlen $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ ein Eigenwert von K ist. Dann aber ist λ auch wirklich ein Eigenwert von $Q(x, y)$. Denn sei z. B. $\frac{1}{r_1}$ ein Eigenwert von K und $\omega(x)$ eine beliebige zu $\frac{1}{r_1}$ gehörige Eigenfunktion, so ist

$$\int_0^1 Q(x, y)\, \omega(y)\, dy - \frac{1}{\lambda}\omega(x) = \left(\mathfrak{K}^n + a_1 \mathfrak{K}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathfrak{K} - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \omega$$
$$= \left(r_1^n + a_1 r_1^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r_1 - \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \omega(x) = 0.$$

Es besteht also der

Satz 1[1]. *Ist λ ein Eigenwert von Q, so ist wenigstens eine der Lösungen der Gleichung*

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \tag{1}$$

ein Eigenwert von K, und umgekehrt: besitzt K einen Eigenwert, der die Gleichung (1) *befriedigt, so ist λ ein Eigenwert von Q.*

Die zu $\frac{1}{r}$ gehörigen Eigenfunktionen von K sind auch Eigenfunktionen von Q. Aber damit sind die zu λ gehörigen Eigenfunktionen von Q noch nicht erschöpft. Zu ihrem allgemeinen Ausdruck gelangt man wie folgt:

Unter den Lösungen von (1) seien nur $\frac{1}{r_{\nu+1}}, \frac{1}{r_{\nu+2}}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ Eigenwerte von K, so daß $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv \varphi_3 \equiv \cdots \equiv \varphi_\nu \equiv 0$ ist. Es gibt aber eine nicht identisch verschwindende Funktion $\varphi_{\nu+1}$, für welche

$$(\mathfrak{K} - r_{\nu+1}) \cdot \varphi_{\nu+1} = 0$$

gilt. Dann ist aber

$$(\mathfrak{K} - r_{\nu+2}) \cdot \varphi_{\nu+2} = \varphi_{\nu+1}. \tag{2}$$

Da $r_{\nu+1} \neq r_{\nu+2}$[3]) angenommen werden kann, ist diese inhomogene Integralgleichung lösbar. Denn die zu $\frac{1}{r_{\nu+2}}$ gehörenden Eigenfunktionen des Operators $\overline{\mathfrak{K}}$[4]) sind zu $\varphi_{\nu+1}$ orthogonal.

Wir bezeichnen mit $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m; \tau)$ den m-ten Fredholmschen Minor von K[5]). Der Rang[5]) von $\frac{1}{r_{\nu+l}}$ sei $\varrho_{\nu+l}$.

Wir betrachten den Operator $\mathfrak{H}_{\nu+l}$, dessen Kern

$$H\left(x, y; \frac{1}{r_{\nu+l}}\right) = \frac{\Delta\left(x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho_{\nu+l}}; y, y_1, y_2, \ldots, y_{\varrho_{\nu+l}}; \frac{1}{r_{\nu+l}}\right)}{\Delta\left(x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho_{\nu+l}}; y_1, y_2, \ldots y_{\varrho_{\nu+l}}; \frac{1}{r_{\nu+l}}\right)}$$

ist; $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho_{\nu+l}}; y_1, \ldots, y_{\varrho_{\nu+l}}$ gehören dem Intervall $[0,1]$ an. Dann ist, wie bekannt, die Lösung der inhomogenen Gleichung (2)

$$\varphi_{\nu+2} = -\frac{1}{r_{\nu+2}}\left(1 + \frac{1}{r_{\nu+2}}\mathfrak{H}_{\nu+2}\right) \cdot \varphi_{\nu+1}.$$

$\varphi_{\nu+2}$ kann nicht identisch verschwinden, falls $\varphi_{\nu+1} \equiv 0$ ist. Der folgende Schritt unseres Verfahrens liefert die Gleichung

$$(\mathfrak{K} - r_{\nu+3}) \cdot \varphi_{\nu+3} = \varphi_{\nu+2}. \tag{3}$$

[3]) Wenn nämlich $r_{\nu+1} = r_{\nu+2}$ wäre, so wählen wir $\varphi_{\nu+1} \equiv 0$ und beginnen den Prozeß bei $\varphi_{\nu+2}$.

[4]) $\overline{\mathfrak{K}}$ ist der zum Kern $K(y, x)$ gehörige Operator.

[5]) G. Vivanti - F. Schwank, Elemente der Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 107. Hannover 1929.

Vorausgesetzt, daß $r_{\nu+3} \neq r_{\nu+2}$, ist *jede* zu $\frac{1}{r_{\nu+3}}$ gehörende Eigenfunktion $\psi_{\nu+3}$ von $\overline{\mathfrak{K}}$ orthogonal zu $\varphi_{\nu+2}$. Dies beweisen wir wie folgt: Wenn wir beide Seiten der Gleichung (2) mit $\psi_{\nu+3}$ multiplizieren und integrieren, so wird

$$\int_0^1 \int_0^1 \psi_{\nu+3}(x)\, K(x,y)\, \varphi_{\nu+2}(y)\, dx\, dy - r_{\nu+2} \cdot \int_0^1 \psi_{\nu+3}(x)\, \varphi_{\nu+2}(x)\, dx = 0.$$

Gemäß der Definition von $\psi_{\nu+3}$ ist

$$(r_{\nu+3} - r_{\nu+2}) \cdot \int_0^1 \psi_{\nu+3}(x)\, \varphi_{\nu+2}(x)\, dx = 0.$$

Daraus folgt

$$\int_0^1 \psi_{\nu+3}(x)\, \varphi_{\nu+2}(x)\, dx = 0.$$

Die Gleichung (3) läßt sich also lösen, und zwar erhält man

$$\begin{aligned}\varphi_{\nu+3} &= -\frac{1}{r_{\nu+3}}\left(1 + \frac{1}{r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+3}\right)\varphi_{\nu+2} \\ &= \frac{1}{r_{\nu+2} \cdot r_{\nu+3}}\left(1 + \frac{1}{r_{\nu+2}}\mathfrak{H}_{\nu+2} + \frac{1}{r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+3} + \frac{1}{r_{\nu+2} \cdot r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+2} \cdot \mathfrak{H}_{\nu+3}\right) \cdot \varphi_{\nu+1}.\end{aligned}$$

Nach $n - \nu$ Schritten gelangen wir zur Lösung

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{(-1)^{n-\nu+1}}{r_{\nu+2} \cdot r_{\nu+3} \cdots r_n}\Big[1 &+ \Big(\frac{1}{r_{\nu+2}}\mathfrak{H}_{\nu+2} + \frac{1}{r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+3} + \cdots + \frac{1}{r_n}\mathfrak{H}_n\Big) + \\ &+ \Big(\frac{1}{r_{\nu+2} \cdot r_{\nu+3}}\mathfrak{H}_{\nu+2} \cdot \mathfrak{H}_{\nu+3} + \frac{1}{r_{\nu+2}\, r_{\nu+4}}\mathfrak{H}_{\nu+2} \cdot \mathfrak{H}_{\nu+4} + \cdots + \\ &+ \frac{1}{r_{n-1}\, r_n}\mathfrak{H}_{n-1} \cdot \mathfrak{H}_n\Big) + \cdots + \frac{1}{r_{\nu+2} \cdot r_{\nu+3} \cdots r_n}\mathfrak{H}_{\nu+2} \cdot \mathfrak{H}_{\nu+3} \cdots \mathfrak{H}_n\Big] \cdot \varphi_{\nu+1}.\end{aligned}$$

Da φ eine Eigenfunktion von Q ist, kann man den konstanten Faktor weglassen. Ist nun im allgemeinen Φ_p eine zu $\frac{1}{r_{\nu+p}}$ gehörige Eigenfunktion von K, so ist

$$\begin{aligned}(4)\quad \varphi = \Big[1 &+ \sum_{l}^{1,n}{}' \frac{1}{r_{\nu+l}}\mathfrak{H}_{\nu+l} + \sum_{l<s}^{1,n}{}' \frac{1}{r_{\nu+l} \cdot r_{\nu+s}}\mathfrak{H}_{\nu+l} \cdot \mathfrak{H}_{\nu+s} + \cdots + \\ &+ \frac{1}{r_{\nu+1} \cdots r_{\nu+p-1}\, r_{\nu+p+1} \cdots r_n}\mathfrak{H}_{\nu+1} \cdots \mathfrak{H}_{\nu+p-1} \cdot \mathfrak{H}_{\nu+p+1} \cdots \mathfrak{H}_n\Big]\Phi_p\end{aligned}$$

eine Eigenfunktion von Q. Mit Σ' bezeichnen wir die Summierung über alle Zeiger mit Ausnahme von p.

Wenn die Gleichung (1) mehrfache Wurzeln besitzt, welche Eigenwerte von K sind, so bleibt die Formel (4) gültig, jedoch bezeichnen $r_{\nu+1}, \ldots, r_n$ die verschiedenen Wurzeln von $P(x)$, deren reziproke Eigenwerte von K sind.

Aus der Formel (4) folgt, daß, wenn K nur einen die Gleichung (1) befriedigenden Eigenwert besitzt, die Gleichung (I) keine anderen nichttrivialen Lösungen hat als die Funktionen Φ_p.

Aus Satz 1 folgt die wohlbekannte Tatsache, daß, falls μ^n ein Eigenwert von K_n ist, wenigstens eine der Zahlen $\varepsilon^l \cdot \mu$ ($l = 0, 1, 2, \ldots n$; $\varepsilon^n = 1$) ein Eigenwert von K ist.

Sind die Kerne $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ vertauschbar [6]) und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ beliebige Konstanten, so betrachten wir die Integralgleichung

$$\text{(II)} \qquad \varphi(x) - \int_0^1 \Big[\sum_r^{1,n} \lambda_r K^{[r]}(x,y) - \sum_{r<s}^{1,n} \lambda_r \lambda_s K^{(r,s)}(x,y) + \\ + \sum_{r<s<t}^{1,n} \lambda_r \lambda_s \lambda_t K^{(r,s,t)}(x,y) \mp \cdots + \\ + (-1)^{n-1} \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n K^{(1,2,\ldots n)}(x,y) \Big] \varphi(y)\, dy = 0,$$

wo

$$K^{(i_1, i_2, \ldots, i_p)}(x,y) = \int_0^1 \cdots \int_{(p-1)}^1 K^{(i_1)}(x\, t_1) K^{(i_2)}(t_1\, t_2) \ldots K^{(i_p)}(t_{p-1}, y)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{p-1}$$

ist.

Satz 2. *Die Gleichung* (II) *besitzt nur in dem Falle eine nicht triviale Lösung, wenn mindestens ein λ_p ein Eigenwert von $K^{(p)}$ ist.*

Den Kernen $K^{(p)}(x,y)$ mögen die Operatoren $\mathfrak{K}_p$ ($p = 1, 2, \ldots, n$) entsprechen. Dann setzen wir die Gleichung (II) in die Form

$$(\lambda_1 \mathfrak{K}_1 - 1)(\lambda_2 \mathfrak{K}_2 - 1) \ldots (\lambda_n \mathfrak{K}_n - 1) \cdot \varphi = 0.$$

Man kann nun den Satz 2 ebenso beweisen wie den Satz 1.

Im Falle $n = 2$ und $\lambda_1 = \lambda_2$ ergibt unser Satz den Satz des Herrn Satô [7]).

Wählen wir die Kerne $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ paarweise orthogonal, so folgt aus Satz 2 der bekannte

Satz 3 [8]). *Sind die Kerne $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ paarweise orthogonal, so erhält man die Eigenwerte von*

$$K = K^{(1)} + K^{(2)} + \cdots + K^{(n)},$$

indem man die Eigenwerte von $K^{(1)}, \ldots, K^{(n)}$ zusammennimmt.

Betrachten wir den Fall $n = 2$ und sei λ_1 ein Eigenwert von $K^{(1)}$, φ eine zu λ_1 gehörende beliebige Eigenfunktion, dann folgt aus Satz 3:

$$\varphi = \varphi + \lambda \mathfrak{K}_2 \varphi;$$

nun ist $\mathfrak{K}_2 \varphi \equiv 0$.

[6]) Soula, l. c., S. 44.

[7]) T. Satô, The Tôhoku Math. J. **38**, II (1933), S. 179.

[8]) Vivanti-Schwank, l. c., S. 130.

Corollar: Wenn $K^{(1)}$ und $K^{(2)}$ orthogonale Kerne sind, dann ist jede Eigenfunktion von $K^{(1)}$ zu $K^{(2)}$ orthogonal und umgekehrt.

2. Betrachten wir die der homogenen Gleichung (I) entsprechende inhomogene Gleichung

$$\text{(III)} \quad \int_0^1 [K_n(x,y) + a_1 K_{n-1}(x,y) + \cdots + a_{n-1} K(x,y)] \cdot \varphi(y)\, dy + \\ + a_n \varphi(x) = f(x) \quad (f(x) \not\equiv 0).$$

Sie läßt sich in die Form setzen

$$(\mathfrak{K} - r_1)(\mathfrak{K} - r_2) \ldots (\mathfrak{K} - r_n)\, \varphi = f.$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen nur dann lösbar, wenn $-\frac{1}{a_n}$ kein Eigenwert von Q ist; das erfolgt nach Satz 1 nur dann, wenn K unter den Zahlen $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ keinen Eigenwert hat. Der lösende Kern von $K(x,y)$ für den Parameterwert $\frac{1}{r_i}$ sei $R\left(x, y; \frac{1}{r_i}\right)$; der entsprechende Operator $\mathfrak{R}_i$. Dann ist

$$(\mathfrak{K} - r_1)\, \varphi_1 = f;$$

daraus folgt

$$\varphi_1 = -\frac{1}{r_1}(\mathfrak{R}_1 + r_1) \cdot f.$$

Also wird

$$\varphi = \frac{(-1)^n}{r_1^n r_2^n \ldots r_n^n} (\mathfrak{R}_1 + r_1)(\mathfrak{R}_2 + r_2) \ldots (\mathfrak{R}_n + r_n) \cdot f \\ = \frac{(-1)^n}{a_n^2} (\mathfrak{R}_1 + r_1)(\mathfrak{R}_2 + r_2) \ldots (\mathfrak{R}_n + r_n) \cdot f.$$

Bezeichnet $S(x, y; \lambda)$ (der ihm entsprechende Operator sei $\mathfrak{S}$) den lösenden Kern $Q - s$, so bekommt man

$$\varphi = -\frac{1}{a_n^2}(\mathfrak{S} - a_n) \cdot f.$$

Das ergibt

$$-\frac{1}{a_n^2}(\mathfrak{S} - a_n) = \frac{(-1)^n}{a_n^2} (\mathfrak{R}_1 + r_1)(\mathfrak{R}_2 + r_2) \ldots (\mathfrak{R}_n + r_n),$$

nun ist

$$\mathfrak{S} = (-1)^n (\mathfrak{R}_1 + r_1)(\mathfrak{R}_2 + r_2) \ldots (\mathfrak{R}_n + r_n).$$

Falls alle Zahlen $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$ verschieden sind, betrachtet man die wohlbekannte Identität

$$\int_0^1 R\left(x,t; \frac{1}{r_\nu}\right) R\left(t,y; \frac{1}{r_\mu}\right) dt = \frac{R\left(x,y; \frac{1}{r_\nu}\right) - R\left(x,y; \frac{1}{r_\mu}\right)}{\frac{1}{r_\nu} - \frac{1}{r_\mu}} = \frac{R_\nu - R_\mu}{\sigma_\nu - \sigma_\mu} \quad (\nu \neq \mu)$$

ganz allgemein

$$\int_0^1 \dots \int_{(n-1)}^1 \int_0^1 R(x,t_1;\sigma_1)\,R(t_1,t_2;\sigma_2)\dots R(t_{n-1},y;\sigma_n)\,dt_1\,dt_2\dots dt_{n-1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_1^{n-2} & \sigma_2^{n-2} & \dots & \sigma_n^{n-2} \\ R_1 & R_2 & \dots & R_n \end{vmatrix}}{V(\sigma_1\sigma_2,\dots,\sigma_n)}.$$

$V(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)$ ist die Vandermondesche Determinante der Größen $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n$.

Nun ergibt sich für den lösenden Kern von Q

$$S\left(x,y;-\frac{1}{a_n}\right) = -\Bigg[\sigma_1 R_1+\sigma_2 R_2+\dots+\sigma_n R_n+\sigma_1\sigma_2\frac{\begin{vmatrix}1&1\\R_1&R_2\end{vmatrix}}{V(\sigma_1,\sigma_2)}+$$
$$+\dots+\sigma_{n-1}\sigma_n\frac{\begin{vmatrix}1&1\\R_{n-1}&R_n\end{vmatrix}}{V(\sigma_{n-1}\sigma_n)}+$$
$$+\dots+\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n\frac{\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\\sigma_1&\sigma_2&\dots&\sigma_n\\\dots&\dots&\dots&\dots\\\sigma_1^{n-2}&\sigma_2^{n-2}&\dots&\sigma_n^{n-2}\\R_1&R_2&\dots&R_n\end{vmatrix}}{V(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)}\Bigg]a_n.$$

In dieser Formel ist der Koeffizient von R_1

$$c_1 = -\sigma_1 a_n\Bigg[1-\sum_r^{2,n}\frac{\sigma_r}{\sigma_r-\sigma_1}+\sum_{r<s}^{2,n}\frac{\sigma_r}{\sigma_r-\sigma_1}\cdot\frac{\sigma_s}{\sigma_s-\sigma_1}\mp\dots+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\cdot\frac{\sigma_3}{\sigma_3-\sigma_1}\dots\frac{\sigma_n}{\sigma_n-\sigma_1}\Bigg]$$
$$=\sigma_1\sigma_n\prod_{r=2}^{n}\left(1-\frac{\sigma_r}{\sigma_r-\sigma_1}\right)=(-1)^n\sigma_1^n a_n\prod_{r=2}^{n}\frac{1}{\sigma_r-\sigma_1}.$$

Nun ist allgemein

$$c_p=(-1)^n\sigma_p\cdot a_n\prod_{r=1}^{n}{}'\frac{1}{\sigma_r-\sigma_p}\qquad(p=1,2\dots n).$$

Dabei bezeichnen wir mit Π' die Multiplikation über alle Zeiger mit Ausnahme von p.

Satz 4. *Der lösende Kern von Q läßt sich durch den lösenden Kern von $K(x,y)$ folgendermaßen ausdrücken:*

$$S\left(x,y;-\frac{1}{a_n}\right)=(-1)^n a_n\cdot\sum_{p=1}^{n}\sigma_p^n\prod_{r=1}^{n}{}'\frac{R(x,y;\sigma_p)}{\sigma_r-\sigma_p}.$$

Die Integralgleichung

$$\varphi(x)-\int_0^1 K_n(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x)$$

ist ein besonderer Fall der Gleichung (III). Jetzt ist $a_n = -1$; $\sigma_p = \varepsilon^{n-p+1}$ $(p = 1, 2, \ldots, n;\ \varepsilon^n = 1)$ und

$$c_p = (-1)^{n+1} \cdot \varepsilon^{n(n-p+1)} \prod_{r=1}^{n}{}' \frac{1}{\varepsilon^{n-r+1} - \varepsilon^{n-p+1}}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \varepsilon^{p-1} \cdot \prod_{r=1}^{n}{}' \frac{1}{\varepsilon^{p-r} - 1} = (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} \frac{\varepsilon^{p-1}}{n} = \frac{\varepsilon^{p-1}}{n}\ ^{9}).$$

Corollar:

$$R^{(n)}(x, y; 1) = \frac{1}{n} [R(x, y; 1) + \varepsilon R(x, y; \varepsilon) + \cdots + \varepsilon^{n-1} R(x, y; \varepsilon^{n-1})].$$

Dabei ist $R^{(n)}$ die Resolvente von K_n. Das ist ein klassisches, schon von Fredholm herrührendes Resultat [10]).

Mit der bisher befolgten Methode kann man noch ein anderes bekanntes Ergebnis verallgemeinern. Zu diesem Zwecke betrachten wir die der Gleichung (II) entsprechende inhomogene Gleichung

$$\text{(IV)} \qquad \varphi(x) - \int_0^1 \Big[\sum_{r}^{1,n} \lambda_r K^{(r)}(x, y) - \sum_{r<s}^{1,n} \lambda_r \lambda_s K^{(r,s)}(x, y) \mp$$

$$\mp \cdots + (-1)^{n-1} \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n K^{(1,2,\ldots n)}(x, y) \Big] \varphi(y)\, dy = f(x) \quad (f(x) \not\equiv 0).$$

Aus der Zerlegung

$$(\lambda_1 \mathfrak{K}_1 - 1)(\lambda_2 \mathfrak{K}_2 - 1) \ldots (\lambda_n \mathfrak{K}_n - 1) \cdot \varphi = f$$

folgt, daß diese Gleichung im allgemeinen nur dann eine Lösung besitzt, falls λ_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ kein Eigenwert von $K^{(p)}$ ist.

Die Lösung erhalten wir in der folgenden Weise:

Aus der Gleichung

$$(\lambda_1 \mathfrak{K}_1 - 1)\, \varphi_1 = f$$

folgt

$$\varphi_1 = -(\lambda_1 \mathfrak{K}_1 + 1) \cdot f;$$

dabei ist $\mathfrak{K}_1$ der Operator des lösenden Kernes von $K^{(1)}$ an der Parameterstelle $\lambda = \lambda_1$.

---

[9]) Der Ausdruck $(\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 - 1) \ldots (\varepsilon^{n-1} - 1)$ ist der Wert des Polynoms

$$\pi(x) = \prod (\varepsilon^r - x) = (-1)^{n-1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = (-1)^{n-1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)$$

an der Stelle $x = 1$. Nun ist aber $\pi(1) = (-1)^{n-1} \cdot n$.

[10]) Implizite schon bei Fredholm, C. R. Paris **134**, S. 156 und Acta Math. **27**. Für $n = 2$ bei D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 70. Leipzig 1912. Voller Beweis bei J. Plemelj, Monatshefte f. Math. **15** (1904), S. 125 und E. Goursat, Toulouse Ann. (2) **10** (1908), S. 15.

Nun ist die Lösung von (IV)

$$\varphi = (-1)^n (\lambda_1 \mathfrak{R}_1 + 1)(\lambda_2 \mathfrak{R}_2 + 1) \dots (\lambda_n \mathfrak{R}_n + 1) \cdot f.$$

Wir benutzen dieses Ergebnis zur Umkehrung der Gleichung (4). Dazu bemerken wir, daß die Lösung der Gleichung

$$\varphi_{\nu+2} = -\frac{1}{r_{\nu+2}}\left(1 + \frac{1}{r_{\nu+2}} \mathfrak{H}_{\nu+2}\right) \cdot \varphi_{\nu+1}$$

die folgende ist:

$$\varphi_{\nu+1} = (\mathfrak{K} - r_{\nu+2}) \cdot \varphi_{\nu+2}.$$

Also kann man den Operator $\mathfrak{K}$ als den lösenden Operator von $\mathfrak{H}_{\nu+2}$ (allgemein von $\mathfrak{H}_{\nu+l}$) betrachten. Nun ist die Umkehrung der Formel (4):

$$\Phi_1 = \left(\frac{1}{r_{\nu+2}} \mathfrak{K} - 1\right)\left(\frac{1}{r_{\nu+3}} \mathfrak{K} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{r_n} \mathfrak{K} - 1\right) \cdot \varphi.$$

Satz 5. *Ist φ eine beliebige zu λ gehörige Eigenfunktion von Q, so ist*

$$\Phi = \varphi(x) + p_1 \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy + p_2 \int_0^1 K_2(x, y)\, \varphi(y)\, dy + \\ + \dots + p_{n-\nu-2} \int_0^1 K_{n-\nu-2}(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

eine Eigenfunktion von K, wobei

$$p_1 = -\sum_{i}^{1, n-\nu}{}' \frac{1}{r_{\nu+i}}; \quad p_2 = +\sum_{i<k}^{1, n-\nu} \frac{1}{r_{\nu+i} \cdot r_{\nu+k}}; \quad \dots;$$

$$p_{n-\nu-2} = \frac{(-1)^{n-\nu-1}}{r_{\nu+1} r_{\nu+2} \dots r_{\nu+q-1} r_{\nu+q+1} \dots r_n}$$

ist. Sie gehört zum Eigenwert $\frac{1}{r_{\nu+q}}$ [11]).

Für den Kern K_n wurde der Satz von Goursat [12]) bewiesen.

[11]) Σ' bezeichnet die Addierung über alle Zeiger mit Ausnahme von q.

[12]) Goursat, Cours d'Analyse III, S. 399.

(Eingegangen am 8. Dezember 1941.)

Das Lucassche Ehepaarproblem.

Von

Waldemar Schöbe in Stuttgart, z. Zt. im Felde.

Ein auch in zusammenfassenden Werken mehrfach behandeltes, aber noch nicht erledigtes kombinatorisches Problem ist die folgende Aufgabe von Lucas[1]): Auf wieviele Arten können um einen Tisch mit $2n$ Stühlen n Ehepaare derart Platz nehmen, daß jeder Mann zwischen zwei Frauen, aber kein Mann neben seiner Ehefrau sitzt?

Mit A_n soll die Anzahl der Sitzordnungen bezeichnet werden, die die Männer entsprechend der Bedingung des Problems einnehmen können, nachdem zuvor die Frauen, jeden zweiten Stuhl freilassend, irgendwie Platz genommen haben. Um für A_n eine Rekursionsformel abzuleiten, werden noch zwei andere Anzahlfunktionen betrachtet: die Anzahl B_n der Sitzordnungen der Männer derart, daß ein bestimmter Mann auf einer bestimmten Seite neben seiner Ehefrau, die übrigen Männer aber nicht neben ihren Ehefrauen sitzen, und die Anzahl C_n all der Sitzordnungen, bei denen ein bestimmter Mann auf einer bestimmten Seite neben seiner Ehefrau, irgendein weiterer Mann auf irgendeiner Seite neben seiner Ehefrau und alle übrigen Männer nicht neben ihren Ehefrauen sitzen. Dann gelten die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= (n-2)\,A_n + (3n-4)\,B_n + C_n, \\ B_{n+1} &= \quad A_n + \quad B_n, \\ C_{n+1} &= \quad (2n-1)\,B_n + C_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Hiernach muß jede Anzahlfunktion einer linearen homogenen Rekursionsformel 3. Ordnung genügen. Für B_n wird diese besonders einfach:

$$B_{n+2} = n\,B_{n+1} + n\,B_n + B_{n-1}. \tag{2}$$

Die Anfangswerte sind $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, $C_2 = 1$ für (1) bzw. $B_2 = 0$, $B_3 = 0$, $B_4 = 1$ für (2). Es wird dann $B_5 = 3$. Einer darüber hinaus noch bekannten Rekursionsformel 2. Ordnung für A_n begegnen wir weiter unten. Ein geschlossener Ausdruck im üblichen Sinne für die Folgen A_n, B_n, C_n ist jedoch bisher nicht angegeben worden. Das soll hier geschehen.

[1]) É. Lucas, Théorie des nombres, Paris 1891, Bd. I, Nr. 123, S. 215 u. 491–495 (Note III). — Vgl. auch W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, 2. Aufl., Leipzig 1918, Bd. II, S. 73–79, und H. Dörrie, Triumph der Mathematik, 2. Aufl., Breslau 1940, S. 25–32.

Die Fragestellung, die zu den A_n führt, ist unverkennbar verwandt mit dem altbekannten Problem, auf wieviele Arten n Briefe in n Umschläge so gesteckt werden können, daß kein Brief in den richtigen Umschlag gelangt, oder, in der Sprechweise unseres Problems: auf wieviele Arten die Männer so Platz nehmen können, daß keiner *links* neben seiner Ehefrau sitzt. Für diese Anzahlfunktion h_n kann die Rekursionsformel

$$h_{n+1} = n h_n + n h_{n-1} \tag{3}$$

hergeleitet werden, die sich durch den Ansatz $h_n - n h_{n-1} = g_n$ sofort auf $g_{n+1} + g_n = 0$ reduziert. Die Lösung ist bekanntlich

$$h_n = n! \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}, \tag{4}$$

und für unbegrenzt wachsendes n strebt $\frac{h_n}{n!} \to e^{-1}$. Hiernach möchte man aus heuristischen Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen für das Ehepaarproblem $\frac{A_n}{n!} \to e^{-2}$ vermuten, und das werden wir bestätigen.

Der Ähnlichkeit von (2) mit (3) Rechnung tragend, gehen wir mit dem Ansatz $B_{n+1} - n B_n = b_{n-2}$ in (2) ein und erhalten zunächst

$$b_{n-1} + b_{n-2} = B_{n-1} \tag{5}$$

und dann weiter

$$b_{n-2} = B_{n+1} - n B_n = (b_{n+1} + b_n) - n\,(b_n + b_{n-1})$$

oder

$$(b_{n+1} - n b_n - b_{n-1}) + \big(b_n - (n-1)\, b_{n-1} - b_{n-2}\big) = 0.$$

Also ist $b_{n+1} - n b_n - b_{n-1} = K \cdot (-1)^n$, und aus den Anfangswerten $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = -1$ ergibt sich $K = 2$. Damit ist gewonnen

$$b_{n+1} = n b_n + b_{n-1} + 2 \cdot (-1)^n. \tag{6}$$

Mittels dieser Rekursionsformel kann man die Folge der b_n auch nach rückwärts fortsetzen. Es wird $b_{-1} = -1$. Aus der Gleichung (6), gebildet für n und für $-n$, folgt durch Subtraktion für $t_n = b_n + b_{-n}$ die Rekursionsformel $t_{n+1} = n t_n + t_{n-1}$. Da die Anfangswerte $t_0 = 2\, b_0 = 0$ und $t_1 = b_1 + b_{-1} = 0$ sind, ist immer $t_n = 0$, also

$$b_{-n} = -b_n, \tag{7}$$

eine Eigenschaft, die übrigens nur bei den hier in Betracht kommenden Anfangswerten mit (6) verträglich ist und im folgenden auch die explizite Benutzung der Anfangswerte völlig ersetzt.

Mit Hilfe der b_n lassen sich die A_n, B_n, C_n einfach ausdrücken:

$$\begin{aligned} A_n &= b_{n+1} - b_{n-1}, \\ B_n &= b_n + b_{n-1}, \\ C_n &= 2\,b_n + 3\,b_{n-1} + 2\,b_{n-2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Die zweite dieser Gleichungen hatten wir schon in (5), die beiden anderen folgen daraus nach (1) und (6). Führt man durch

$$A_n = n b_n + 2 \cdot (-1)^n \tag{9}$$

A_n statt b_n in (6) ein, so ergibt sich die bereits erwähnte, hier aber nicht gebrauchte Rekursionsformel von Laisant

$$(n-1)\,A_{n+1} = (n^2-1)\,A_n + (n+1)\,A_{n-1} + 4 \cdot (-1)^n,$$

der sich ähnliche für B_n und C_n an die Seite stellen lassen.

Um nun (6) mit (7) aufzulösen, führen wir die Hilfsgrößen

$$c_{k,n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{k-\nu}}{\nu!}$$

ein. Es wird

$$c_{k+1,n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{k+1-\nu}}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(k-\nu)\,b_{k-\nu} + b_{k-\nu-1} + 2\cdot(-1)^{k-\nu}}{\nu!}$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{n} \left(\frac{k-\varrho}{\varrho!} + \frac{1}{(\varrho-1)!} \right) b_{k-\varrho} + \frac{b_{k-n-1}}{n!} + 2\cdot(-1)^k \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!}$$

(wobei hier, ebenso wie einige Zeilen später, für $\varrho = 0$ $\frac{1}{(\varrho-1)!} = 0$ zu setzen ist)

$$= k\,c_{k,n} + \frac{b_{k-n-1}}{n!} + 2\cdot(-1)^k \frac{h_n}{n!},$$

also

$$\frac{c_{k+1,n}}{k!} - \frac{c_{k,n}}{(k-1)!} = \frac{b_{k-n-1}}{n!\,k!} + 2\cdot\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{h_n}{n!}.$$

Durch Summation über k von 0 bis m folgt unter Berücksichtigung von (7)

$$\frac{c_{m+1,n}}{m!} + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{m} \frac{b_{n+1-k}}{k!} = 2\frac{h_n}{n!}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{k!}$$

oder

$$\frac{c_{m+1,n}}{m!} + \frac{c_{n+1,m}}{n!} = 2\frac{h_m}{m!}\frac{h_n}{n!}$$

und für $m = n$:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{n+1-\nu}}{\nu!} = c_{n+1,n} = \frac{h_n^2}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ersetzt man für den Augenblick b_n durch $\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}$ und ν durch $n-\mu$, so läßt sich das Ergebnis in die Form setzen

$$\sum_{\mu=0}^{n}\binom{n}{\mu}a_\mu = h_n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

so daß die a_μ die Anfänge der Differenzenfolgen zur Folge h_n^2 darstellen. Durch Umkehrung folgt

$$a_n = n!\, b_{n+1} = \sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu\binom{n}{\mu}h_{n-\mu}^2,$$

so daß nun mittels (8) die geschlossene Darstellung der A_n, B_n, C_n geleistet ist. Es wird $A_n = 2\cdot(-1)^n + nb_n = 2\cdot(-1)^n + \frac{n}{(n-1)!}a_{n-1}$, also mit $\nu = \mu + 1$

$$A_n = 2\cdot(-1)^n + n\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\,\frac{h_{n-\nu}^2}{(n-\nu)!}. \tag{10}$$

Zum Beweis der Grenzbeziehung

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{n!} = e^{-2} \tag{11}$$

schreibt man

$$\frac{A_n}{n!} = 2\cdot\frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\binom{n-1}{\nu-1}}\left(\frac{h_{n-\nu}}{(n-\nu)!\,(\nu-1)!}\right)^2,$$

wobei $\left|\frac{h_{n-\nu}}{(n-\nu)!}\right|$ stets $\leqq 1$ ist, und hat

$$\left|\frac{A_n}{n!} - \left(\frac{h_{n-1}}{(n-1)!}\right)^2\right| \leqq \frac{2}{n!} + \sum_{\nu=2}^{n-1}\frac{1}{\binom{n-1}{\nu-1}} + \frac{1}{(n-1)!^2} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

weil die Randglieder der Summe Σ die Größenordnung $\frac{1}{n}$, die inneren höchstens die Größenordnung $\frac{1}{n^2}$ haben.

(Eingegangen am 20. November 1942.)

Über gewisse trigonometrische Integrale. I.

Von

Hans Hornich in Wien.

Im folgenden sollen gewisse Integrale von einfacher Bauart näher untersucht werden, die nicht nur an sich von Interesse sind, sondern auch vielfache Anwendungen gestatten. Der Zugang zu diesen Integralen gestaltet sich durch Rekursion, ausgehend vom Dirichletschen Diskontinuitätsfaktor, so einfach, daß schon dadurch eine Reihe von Eigenschaften dieser Integrale zu erkennen sind.

Sei $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ eine Folge positiver Zahlen. Wir definieren dann die folgenden Funktionen:

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < \frac{a_1}{2} \\ 0 & \text{für } |t| > \frac{a_1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{für } |t| = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{1a}$$

und durch Rekursion für alle natürlichen k:

$$\Phi_{k+1}(t) = \int_{-\frac{a_{k+1}}{2}}^{\frac{a_{k+1}}{2}} \Phi_k(t-\tau)\, d\tau. \tag{1b}$$

Man liest aus dieser Darstellung unmittelbar ab:

Es ist für $k \geqq 2$

$$0 \leqq \Phi_k(t) \leqq \prod_{i=2}^{k} a_i \tag{2}$$

und für alle k und $|t| > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} a_i$

$$\Phi_k(t) = 0. \tag{3}$$

Die $\Phi_k(t)$ sind abteilungsweise durch Polynome vom Grad $\leqq k-1$ darstellbar und für $k > 2$ überall $k-2$-fach stetig differenzierbar.

Die $\Phi_k(t)$ sind gerade Funktionen und für $t \leqq 0$ monoton nicht abnehmend, so daß

$$\Phi_k(0) = \operatorname*{Max}_t \Phi_k(t). \tag{4}$$

Als Funktion der $a_1 \ldots a_k$ ist $\Phi_k(t)$ für alle a_i monoton nicht abnehmend. Für alle k gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(t)\,dt = \prod_{i=1}^{k} a_i. \tag{5}$$

Aus (3), (4) und (5) folgt dann:

$$\Phi_k(0) \geqq \frac{\prod_{i=1}^{k} a_i}{\sum_{i=1}^{k} a_i}. \tag{6}$$

Wir geben für die Funktionen Φ_k eine *Integraldarstellung*. Ausgehend vom Dirichletschen Diskontinuitätsfaktor ist:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x\left(t+\frac{a_1}{2}\right) - \sin x\left(t-\frac{a_1}{2}\right)}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1 x}{x}\cos 2xt\,dx = \Phi_1(t).$$

Mit Hilfe von (1b) folgt daraus allgemein[1]):

$$\Phi_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{x}\cos 2xt\,dx. \tag{7}$$

Diese Integrale sind für alle reellen a_i und t sinnvoll. Sie genügen einigen bemerkenswerten Funktionalgleichungen (wir setzen dabei die in den Φ_k auftretenden a_i stets in Evidenz).

Es ist

$$\Phi_k\left(a_1, a_2, \ldots a_k; \tfrac{t}{2}\right) + \Phi_k\left(t, a_2, \ldots a_k; \tfrac{a_1}{2}\right) = \Phi_k(a_1 + t, a_2, \ldots a_k; 0), \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_{k+1}}\Phi_{k+1}(a_1, \ldots a_k, a_{k+1}; 0) = \Phi_k\left(a_1, a_2, \ldots a_k; \frac{a_{k+1}}{2}\right) \tag{9}$$

und durch partielle Integration:

$$\Phi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; \tfrac{1}{2}) = k\,\Phi_{k+1}(a_1, a_2, \ldots a_k, 1; 0) - \sum_{i=1}^{k} a_i \Phi_k\left(a_1, \ldots a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots a_k; \frac{a_i}{2}\right). \tag{10}$$

Die rekursive Herleitung der Integrale Φ_k durch (1) bietet oft die Möglichkeit einer leichten Berechnung. So ergibt sich z. B. ohne weiteres[2]):

$$\Phi_2(a_1, a_2; 0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a_1 x \cdot \sin a_2 x}{x^2}\,dx = \min(a_1, a_2) \quad (a_1, a_2 > 0).$$

[1]) Vgl. G. Polya, Math. Ann. **74**, 204—212. Für den Spezialfall, in dem alle $a_i = 1$ sind, vgl. S. Bochner, Vorlesungen über Fourierssche Integrale, 1932, S. 15; ferner H. Hadwiger, ZAMM, XXII, 226—232.

[2]) Vgl. G. Polya, l. c.

Wir setzen ferner:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{k} a_i} \Phi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; t) = \Psi_k(a_1, a_2, \ldots a_k; t) = \Psi_k(t);$$

nach (1) ist:

$$\Psi_{k+1}(t) = \frac{1}{a_{k+1}} \int_{-\frac{a_{k+1}}{2}}^{\frac{a_{k+1}}{2}} \Psi_k(t-\tau)\, d\tau, \tag{11}$$

so daß die Ψ_{k+1} als Mittelfunktionen aus den Ψ_k entstehen. Daher und wegen (4) ist:

$$\Psi_{k+1}(0) \leqq \Psi_k(0).$$

Die $\Psi_k(t)$ sind also für alle k und alle t gleichmäßig beschränkt. Dieselbe Rekursionsformel (11) gilt auch für die Ableitungen $\Psi_k'(t)$ und es ist $(k > 2)$:

$$\max_t \Psi_{k+1}'(t) \leqq \max_t \Psi_k'(t).$$

Nun ist $(a_1 \geqq a_2)$

$$\Psi_2(t) = \frac{1}{a_1} \text{ für } |t| \leqq \frac{a_1 - a_2}{2}, \quad \Psi_2(t) = \frac{a_1 + a_2 - 2|t|}{2 a_1 a_2} \text{ für } \left| |t| - \frac{a_1}{2} \right| \leqq \frac{a_2}{2},$$

also auch

$$|\Psi_k'(t)| \leqq \frac{1}{a_1 a_2} \quad (k > 2). \tag{12}$$

Analoge Abschätzungen gelten für die höheren Ableitungen.

Wir schreiben noch eine allgemeine Faltungsregel für die Ψ an, die man unmittelbar durch Induktion gewinnt:

$$\Psi_{i+k}(a_1, a_2, \ldots a_{i+k}; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_i(a_1, \ldots a_i; t-\tau)\, \Psi_k(a_{i+1}, \ldots a_{i+k}; \tau)\, d\tau. \tag{13}$$

Wir untersuchen das Verhalten von

$$\Psi_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt\, dx$$

für $k \to \infty$. Wir zeigen:

Für $k \to \infty$ konvergieren die Funktionen $\Psi_k(t)$ stets, und zwar gleichmäßig für alle t

$$\Psi(t) = \lim_{k \to \infty} \Psi_k(t).$$

Ist dabei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ divergent, so ist $\Psi(t) \equiv 0$.

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ *konvergent, so ist* $\Psi(t)$ *eine nicht identisch verschwindende, unbeschränkt differenzierbare Funktion.*

Der Beweis erfordert einige Fallunterscheidungen.

Sei $0 < \varepsilon < R$ und $k > 2$. Wir zerlegen das Integrationsintervall:

$$\int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt\, dx = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} + \int_{R}^{\infty}. \tag{14}$$

Das erste Integral ist absolut $\leqq \varepsilon$; das dritte ist absolut

$$\leqq \frac{1}{a_1 a_2} \int_R^{\infty} \frac{1}{x^2} \prod_{i=3}^{k} \frac{|\sin a_i x|}{a_i x}\, dx \leqq \frac{1}{a_1 a_2 R}.$$

Diese beiden Integrale sind also bei geeigneter Wahl von ε und R beliebig klein. Wir zeigen vom zweiten Integral, daß es für $k \to \infty$ konvergiert.

A. Wir betrachten den Fall, daß die a_i nicht gegen Null konvergieren, und zeigen, daß das zweite Integral in (14) für $k \to \infty$ gegen Null strebt.

Für $x > 0$ hat $\frac{\sin a_i x}{x}$ extreme Werte für die Stellen $x^{(i)}$ mit $a_i x^{(i)} = \operatorname{tg} a_i x^{(i)}$; es ist wegen $a_i > 0$ dann $x^{(i)} > \frac{\pi}{a_i}$. Für $x \geqq \varepsilon$ ist daher stets:

$$\left|\frac{\sin a_i x}{x}\right| \leqq \max\left(\frac{|\sin a_i \varepsilon|}{\varepsilon}, \frac{|\sin a_i x^{(i)}|}{x^{(i)}}\right) \leqq a_i \max\left(\frac{|\sin a_i \varepsilon|}{a_i \varepsilon}, \frac{1}{\pi}\right).$$

Es ist daher weiter:

$$\left|\int_{\varepsilon}^{R} \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt\, dx\right| \leqq R \prod_{i=1}^{k} \max\left(\frac{|\sin a_i \varepsilon|}{a_i \varepsilon}, \frac{1}{\pi}\right).$$

Nach unserer Voraussetzung gibt es ein $\alpha > 0$, so daß unendlich viele $a_i \geqq \alpha$ sind. Wir bezeichnen die Anzahl der $a_1 \ldots a_k$ mit $a_i \geqq \alpha$ mit k'; mit $k \to \infty$ geht dann auch $k' \to \infty$. Weiter ist für alle $h \geqq \alpha\varepsilon$:

$$\left|\frac{\sin h}{h}\right| \leqq \max\left(\frac{|\sin \alpha\varepsilon|}{\alpha\varepsilon}, \frac{1}{\pi}\right)$$

und endlich:

$$\left|\int_{\varepsilon}^{R} \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2xt\, dx\right| \leqq R\left[\max\left(\frac{|\sin \alpha\varepsilon|}{\alpha\varepsilon}, \frac{1}{\pi}\right)\right]^{k'};$$

die rechte Seite der Ungleichung strebt also für $k \to \infty$ gegen Null, q. e. d.

B. Sei nun $a_i \to 0$. Bei vorgegebenem η mit $0 < \eta < 1$ ist dann für fast alle i und $\varepsilon \leqq x \leqq R$

$$\frac{\sin a_i x}{a_i x} = 1 - \frac{(a_i x)^2}{3!} + \cdots = 1 - \vartheta(i, x)\frac{(a_i x)^2}{6}$$

mit

$$1 - \eta < \vartheta(i, x) < 1 + \eta.$$

a) Ist nun $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ divergent, so divergiert für $\varepsilon \leqq x \leqq R$ auch

$$\sum_{i=1}^{\infty} \vartheta(i, x) \frac{(a_i x)^2}{6}$$

gegen $+\infty$ und es strebt

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \vartheta(i x) \frac{(a_i x)^2}{6}\right) \to 0$$

für $k \to \infty$, und zwar gleichmäßig für alle x mit $\varepsilon \leqq x \leqq R$. Also strebt für divergente $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ jedenfalls $\Psi_k(t) \to 0$, und zwar gleichmäßig für alle t.

b) Sei nun $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ konvergent. Dann ist das unendliche Produkt $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x}$ konvergent, und zwar gleichmäßig für $\varepsilon \leqq x \leqq R$. Es konvergiert daher auch das zweite Integral in (14) für $k \to \infty$ und es ist:

$$(15) \quad \Psi(t) = \Psi(a_1, a_2, \ldots; t) = \lim_{k \to \infty} \Psi_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x} \cos 2 x t \, d x.$$

Man sieht ferner ohne Schwierigkeit, daß auch die r-ten Ableitungen

$$\Psi_k^{(r)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin a_i x}{a_i x} (2 x)^r \cos\left(2 x t + r \frac{\pi}{2}\right) d x \qquad (k > r + 2)$$

für $k \to \infty$ konvergieren:

$$(16) \quad \lim_{k \to \infty} \Psi_k^{(r)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\sin a_i x}{a_i x} (2 x)^r \cos\left(2 x t + r \frac{\pi}{2}\right) d x,$$

also gegen die r-te Ableitung von $\Psi(t)$.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß in diesem Fall $\Psi(t)$ nicht identisch verschwindet.

Aus (4) folgt auch für die Ψ

$$\Psi(a_1, a_2, \ldots; 0) = \max_t \Psi(a_1, a_2, \ldots; t).$$

Nun ist mit $a > 0$:

$$\Psi(a, a_1, a_2, \ldots; t) = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Psi(a_1, a_2, \ldots; t - \tau) \, d \tau,$$

entsteht also durch Mittelbildung aus $\Psi(a_1, a_2, \ldots; t)$ und es ist:

$$\Psi(a, a_1, a_2, \ldots; 0) \leqq \Psi(a_1, a_2, \ldots; 0).$$

Iteriert man die Mittelbildung in der Weise, daß jede der Zahlen a_i zweimal auftritt, so ist (die Reihenfolge des a_i ist ersichtlich gleichgültig):

$$\Psi(a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots; 0) \leqq \Psi(a_1, a_2, \ldots; 0).$$

Nun ist

$$\Psi(a_1, a_1, a_2, a_2, \ldots; 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \prod_{i=1}^\infty \frac{\sin^2 a_i x}{a_i^2 x^2} dx > 0, \tag{17}$$

also ist auch $\Psi(a_1, a_2, \ldots; 0) > 0$ und $\Psi(a_1, a_2, \ldots; t)$ nicht identisch Null.

Wenn sogar schon $\sum_{i=1}^\infty a_i$ konvergiert, so folgt aus (6):

$$\Psi(a_1, a_2, \ldots; 0) \geqq \frac{1}{\sum_{i=1}^\infty a_i}.$$

Wir geben nun einige Anwendungen unserer Integrale.

Anzahl der Zerlegungen einer reellen Zahl in k beschränkte Summanden. Sei t eine reelle Zahl und k eine natürliche Zahl. Wir fragen nach der „Anzahl", wie oft t als Summe von k Summanden dargestellt werden kann:

$$t = \sum_{i=1}^k t_i,$$

wobei die $|t_i| \leqq \frac{a_i}{2}$ sein sollen ($a_1 \ldots a_k$ beliebig gegebene positive Zahlen). Solche Zerlegungen existieren natürlich nur für $|t| \leqq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k a_i$, und zwar unendlich viele, wenn hier das Ungleichheitszeichen steht. Der Anzahl dieser Zerlegungen können wir — so wie es in der Integralgeometrie üblich ist — als Maß oder Dichte eine Zahl zuordnen. Die Rekursionsformeln (1) legen nahe, als Maß dieser Anzahl die Zahl $\Phi_k(t)$ zu wählen[3]).

Zurückführung eines k-fachen Integrals auf ein einfaches. Sei $f(t)$ eine stetige Funktion; dann ist

$$\int_{-\frac{a_k}{2}}^{\frac{a_k}{2}} \ldots \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} f(t_1 + t_2 + \cdots + t_k)\, dt_1 \ldots dt_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \Phi_k(a_1, \ldots a_k; t)\, dt. \tag{18}$$

Für $k = 1$ ist die Formel sicher richtig; sei die Formel für $k - 1$ Variable gezeigt; so ist:

$$\int_{-\frac{a_{k-1}}{2}}^{\frac{a_{k-1}}{2}} \ldots \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} f(t_1 + t_2 + \cdots + t_k) dt_1 \ldots dt_{k-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + t_k) \Phi_{k-1}(a_1, \ldots a_{k-1}; t) dt;$$

[3]) Vgl. H. Hadwiger, l. c.

integriert man nach t_k von $-\frac{a_k}{2}$ bis $\frac{a_k}{2}$, so liefert die rechte Seite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+t_k)\,\Phi_{k-1}(a_1,\ldots a_{k-1};t)\,\Phi_1(a_k;t_k)\,dt\,dt_k$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\Phi_{k-1}(a_1,\ldots a_{k-1};\tau-t_k)\,\Phi_1(a_k;t_k)\,dt_k\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\Phi_k(\tau)\,d\tau.$$

Aus (18) liest man unmittelbar die geometrische Deutung von $\Phi_k(t)$ ab:

$\Phi_k(a_1,\ldots a_k;t)$ ist der $k-1$-dimensionale Inhalt desjenigen Stückes der Hyperebene $t_1+t_2+\cdots+t_k=t$ des $R_k(t_1\ldots t_k)$, welches innerhalb des Quaders $|t_i|\leqq\frac{a_i}{2}$ $(i=1\ldots k)$ liegt.

Iterierte Mittelbildung von Funktionen. Ist $f(t)$ eine stetige Funktion, so bilden wir der Reihe nach die Mittelfunktionen ($a_1a_2\ldots$ positive Zahlen)

$$f_1(t)=\frac{1}{a_1}\int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} f(t+\tau)\,d\tau,$$

$$f_{i+1}(t)=\frac{1}{a_{i+1}}\int_{-\frac{a_{i+1}}{2}}^{\frac{a_{i+1}}{2}} f_i(t+\tau)\,d\tau \qquad (i=1,2,\ldots).$$

Man sieht ohne weiteres nach (11)

$$f_k(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)\,\Psi_k(\tau)\,d\tau.$$

Ist nun z. B. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, so strebt $\Psi_k(t)\to\Psi(t)$ und

$$f_k(t)\to F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)\,\Psi(\tau)\,d\tau;$$

$F(t)$ hängt dabei nur von den Werten $f(t+\tau)$ mit $|\tau|\leqq\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ab und ist eine unbeschränkt differenzierbare Funktion, die sich von den Werten $f(t)$ bei hinreichend kleiner $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ beliebig wenig unterscheidet. Für die Ableitung von $F(t)$ gelten nach (12) ganz einfache Ungleichungen, die hier nicht weiter aufgeschrieben werden sollen.

Eine weitere Mitteilung folgt.

(Eingegangen am 1. Dezember 1942.)

Berichtigung zu Band 47

(A. Stöhr, Anzahlabschätzung einer bekannten Basis h-ter Ordnung, S. 778—787).

Auf Seite 779, Gleichung (10) lies $\overline{\text{fin}}$ statt $\underline{\text{fin}}$ und $\overline{\text{lim}}$ statt $\underline{\text{lim}}$. Die drei auf Gleichung (10) folgenden Zeilen von „Wir haben ..." bis „... im Großen bekannt." sind zu streichen. Im übrigen bleibt der Inhalt der Arbeit unberührt. — Herrn H.-H. Ostmann danke ich für den Hinweis auf den Fehler.

Alfred Stöhr.